ابرسازه های عماد
EMAD HYPER STRUCTURES CO.

تحلیل، طراحی و مشاوره
در زمینه سازه‌های هوافضا و کامپوزیتهای پیشرفته

Analysis, Design and consultation in
Aerospace Structure and Advanced Composites

www.EHSco.ir
Email: b_hosseinpour2003@yahoo.com
Email: b.hosseinpour@chmail.com

Iran - Tabriz
Mobile: +98 914 118 7430
Tel: +98 41 33 85 03 22

EHS-01-0003

الاستیسیته

تیر خمیده یک سرگیردار تحت بار انتهایی

سه نوع تیر با هندسه و مواد ناهمگن

ELASTICITY

CURVED BEAM UNDER END LOADING

Three Type of Beam with Geometry and Non Homogenous Materials

B. HosseinPour Bonab
M.Sc. in Aerospace Structure Engineering

تنظیم و گردآوری: مهندس بهروز حسین پور بناب
کارشناسی ارشد سازه مهندسی هوافضا

الاستيسيته

تیر خمیده یک سرگیردار تحت بار انتهایی

(سه پروژه با هندسه و مواد ناهمگن)

تهیه و تنظیم : بهروز حسین پور بناب

تیر خمیده یک سرگیردار
تحت بارهای انتهایی

تیر خمیده یک سرگیردار
تحت بارهای انتهایی محوری، برشی و ممان خمشی
با هندسه ثابت و مواد همگن

Curved Bar with Constant Geometry and Homogenous Materials under Axial, Shear and Bending Moment Loading at the End

تیر خمیده یک سرگیردار
تحت بارهای انتهایی
با هندسه ثابت و مواد FGM

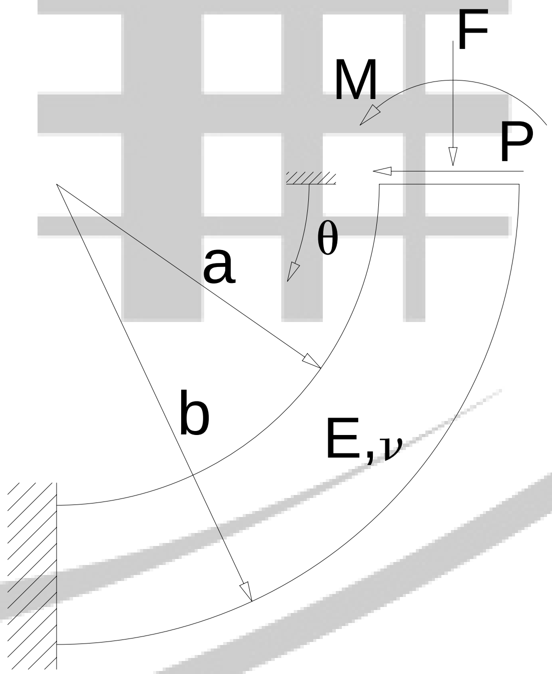
Curved Bar with Constant Geometry and FGM Materials under Loading at the End

تیر خمیده یک سرگیردار
تحت بارهای انتهایی محوری
با هندسه متغیر و مواد همگن

Curved Bar with Variable Geometry and Homogenous Materials under Axial Force Loading at the End

پروژه (۱)

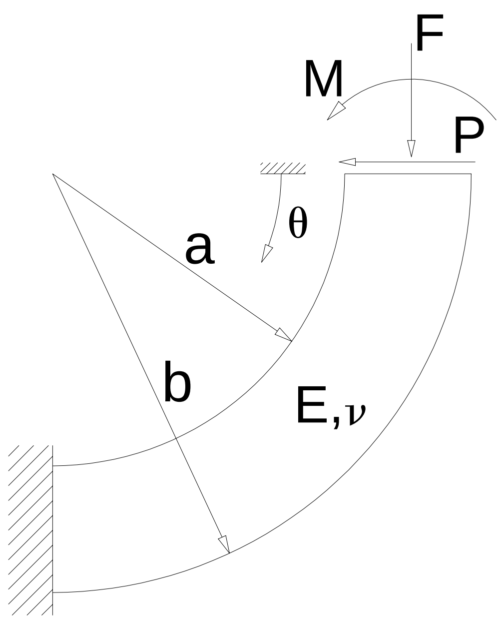
تیر خمیده یک سرگیردار
تحت بارهای انتهایی محوری، برشی و ممان خمشی
با هندسه ثابت و مواد همگن



فهرست عناوین

تیر خمیده یک سر گیردار تحت بارهای انتهایی محوری، برشی و ممان خمشی با هندسه ثابت و مواد همگن

بهروز حسين پور بناب
گروه هوافضا - دانشكده فني مهندسي
دانشگاه تربيت مدرس
b_hosseinpour2003@yahoo.com



يك تير يك سرگيردار ساخته شده از مواد همگن كه فرض ميشود بخشي از يك كمان دايره اي باشد، تحت بارگذاري انتهايي قرار گرفته است. با توجه به شكل مسئله بايد از مختصات قطبي استفاده شود. بدليل اينكه ميتوان از اصل رويهم گذاري براي تك تك بارگذاريها استفاده كرد بنابراين براي جلوگيري از پيچيدگي فرمولها و روابط بدست آمده براي تنش و جابجائيها، هر كدام از بارگذاريهاي محوري، برشي و ممان خمشي به تنهايي تحليل شده است. بمنظور رعايت هماهنگي در كل روابط بدست آمده براي اين متن، بارگذاري محوري شماره (۱) ، برشي (۲) و ممان خمشي (۳) ناميده است. اين شماره گذاري براي تمام روابط و پارامترهاي داخل عبارات رعايت شده است.

۱- تحليل تنش

۱-۱ بارگذاري نيروي محوري **F**

يك نيروي محوري بصورت عمود بر سطح آزاد تير خميده وارد ميشود. براي تحليل، اين نيرو را بصورت مثبت در روابط مي آوريم ولي همانطور كه مشخص است اين بار منفي بوده و در زمان استفاده از عبارات بايد F با علامت منفي لحاظ شود. همانطور كه در مثال مربوطه نيز ارائه شده است.

فرض ميشود كه اين مسئله داراي حل كامل بوده و بنابراين تنشهاي بدست آمده بايد كه رابطه سازگاري (۱) را در تمامي نقاط آن ارضا كنند.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right)=0 \qquad (۱)$$

تنشهايي كه اين معادله را ارضا ميكنند داراي شكل (۲) مي باشند:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \qquad (۱-۲)$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \qquad (۲-۲)$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r.\partial\theta} \qquad (۳-۲)$$

مي دانيم كه ممان خمشي اعمال شده در اين حالت در هر مقطع متناسب با زاويه θ و البتــه بـا $Cos\theta$ خواهـد بـود. در تئوري مقدماتي تيرها پيشنهاد ميشود كه σ_θ متناسب با ممان خمشي اعمال شود. بنابراين براي حل فرض ميشود كه ϕ تابعي از $Cos\theta$ است. يعني :

$$\phi(r,\theta)= f_1(r)(\cos(\theta)-1)+g1.r^2.\cos(\theta) \qquad (۳)$$

كه f1(r) تابعي از r و g1 يك ثابت است. تركيب فوق را ميتوان بصورت ساده از تحليل استاتيكي يك تير خميـده بدسـت آورد. آنرا در سري روابط (۲) قرار ميدهيم:

$$\sigma r = \left[\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{d}{dr}f1(r)+2\cdot g1\cdot r\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\left(-f1(r)-g1\cdot r^2\right)\right]\cdot\cos(\theta)-\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}f1(r) \qquad (۱-۴)$$

$$\sigma\theta = \frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f1(r)\cdot(\cos(\theta)-1)+2\cdot g1\cdot\cos(\theta) \qquad (۲-۴)$$

$$\tau r\theta = \left(g1-\frac{1}{r^2}\cdot f1(r)+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}f1(r)\right)\cdot\sin(\theta) \qquad (۳-۴)$$

عبارت f1(r) که بتواند در روابط تنش صدق کرده و معادله بايهارمونيك را براي حل عمومي ارضا کند داراي شکل (۵) خواهد بود:

$$f1(r) = A1.r^3 + \frac{B1}{r} + C1.r + D1.r.Lnr \tag{۵}$$

که ضرايب A1...D1 ثابت بوده و مقادير آنها، با حل خصوصي معادله بايهارمونيـك از شـرايط مـرزي محاسـبه ميشـوند. شرايط مرزي براي مسئله فوق بدين صورت استکه تنشهاي شعاعي σ_r و تنشهاي برشـي $\tau_{r\theta}$ در $r=a$ و $r=b$ برابـر صـفر ميباشد. همچنين مجموع تنشهاي نرمال (محوري) σ_θ در سر آزاد تير خميده $\theta=0$ برابر نيروي اعمـالي يعنـي F خواهـد بـود. بنابراين با قرار دادن عبارت (۵) در روابط (۴) و بعد از ساده سازي خواهيم داشت:

$$\sigma r = \left(2\cdot A1\cdot r + g1 + \frac{D1}{r} - 2\cdot\frac{B1}{r^3}\right)\cdot\cos(\theta) - \left[3\cdot A1\cdot r - \frac{B1}{r^3} + \frac{C1}{r} + \frac{(1+\ln(r))}{r}\cdot D1\right] \tag{۱-۶}$$

$$\sigma\theta = \left(6\cdot A1\cdot r + 2\cdot\frac{B1}{r^3} + \frac{D1}{r}\right)\cdot(\cos(\theta) - 1) + 2\cdot g1\cdot\cos(\theta) \tag{۲-۶}$$

$$\tau r\theta = \left(2\cdot r\cdot A1 + \frac{-2}{r^3}\cdot B1 + \frac{1}{r}\cdot D1 + g1\right)\cdot\sin(\theta) \tag{۳-۶}$$

حال شرايط مرزي در اين روابط اعمال کرده و به سري عبارات (۷) ميرسيم:

$$\left(2\cdot A1\cdot a + g1 + \frac{D1}{a} - 2\cdot\frac{B1}{a^3}\right) = 0 \tag{۱-۷}$$

$$\left[3\cdot A1\cdot a - \frac{B1}{a^3} + \frac{C1}{a} + \frac{(1+\ln(a))}{a}\cdot D1\right] = 0 \tag{۲-۷}$$

$$\left(2\cdot A1\cdot b + g1 + \frac{D1}{b} - 2\cdot\frac{B1}{b^3}\right) = 0 \tag{۳-۷}$$

$$\left[3\cdot A1\cdot b - \frac{B1}{b^3} + \frac{C1}{b} + \frac{(1+\ln(b))}{b}\cdot D1\right] = 0 \tag{۴-۷}$$

$$t\cdot\int_a^b 2\cdot g1\,dr = F \quad \textbf{or} \quad 2\cdot g1\cdot(b-a) = F/t \tag{۵-۷}$$

جايگذاري شرايط مرزي منتهي به يك دستگاه ۵ معادله ۵ مجهولي ميشود که بعد از حـل مقـاير A1 ، B1 ، C1 ، D1 و g1 بدست مي آيند. بدليل بزرگ بودن روابط از ذکر آنها در اينجا خودداري ميشود. براي مشاهده مي توانيد به پيوست (۱) مربوطه

رجوع كنيد. با جايگذاري پارامترهاي مجهول، تنشهاي شعاعي، زوايه اي و برشي در هر نقطه از تير بدست مي آيد. تنشهاي بدست آمده از اين قسمت را به منظور هماهنگي كل مقاله $\sigma 11_r$ و $\sigma 11_\theta$ و $\tau 11_{r\theta}$ مي ناميم.

$$\begin{bmatrix} 2\cdot a & \frac{-2}{a^3} & 0 & \frac{1}{a} & 1 \\ 2\cdot b & \frac{-2}{b^3} & 0 & \frac{1}{b} & 1 \\ 3\cdot a & \frac{-1}{a^3} & \frac{1}{a} & \frac{(\ln(a)+1)}{a} & 0 \\ 3\cdot b & \frac{-1}{b^3} & \frac{1}{b} & \frac{(\ln(b)+1)}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot(b-a) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A1 \\ B1 \\ C1 \\ D1 \\ g1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

۱-۲ بارگذري نيروي برشي P

يك نيروي برشي بصورت موازي بر سطح آزاد تير خميده وارد ميشود. براي تحليل، اين نيرو را بصورت مثبت در روابط مـي آوريم ولي همانطور كه مشخص است اين بار منفي بوده و در زمان استفاده از عبارات بايد P با علامت منفي لحاظ شـود. بـا توجـه مشابهت اين تحليل با تحليل نيروي محوري از رابطه (۳) به بعد آغاز ميشود.

در اين حالت ممان خمشي اعمال شده در هر مقطع متناسب با زاويه θ و البته با $Sin(\theta)$ خواهد بود. بنابراين براي حـل فرض ميشود كه ϕ تابعي از $Sin(\theta)$ است. يعني :

$$\phi(r,\theta) = f_2(r).\sin(\theta) \quad (۹)$$

عبارت (۹) را در سري روابط (۲) قرار ميدهيم:

$$\sigma r = \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}f2(r) - \frac{1}{r^2}\cdot f2(r)\right)\cdot\sin(\theta) \quad (۱-۱۰)$$

$$\sigma\theta = \frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f2(r)\cdot\sin(\theta) \quad (۲-۱۰)$$

$$\tau r\theta = \left(\frac{1}{r^2}\cdot f2(r) - \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}f2(r)\right)\cdot\cos(\theta) \quad (۳-۱۰)$$

عبارت $f2(r)$ كه بتواند در روابط تنش صدق كرده و مشابه قبلي معادله بايهارمونيك را براي حل عمومي ارضـا كنـد داراي شكل (۱۱) خواهد بود:

$$f2(r) = A2.r^3 + \frac{B2}{r} + C2.r + D2.r.Lnr \qquad (۱۱)$$

بنابراین با قرار دادن عبارت (۱۱) در روابط (۱۰) و بعد از ساده سازي خواهیم داشت:

$$\sigma r = \left(\frac{-2}{r^3}\cdot B2 + \frac{1}{r}\cdot D2 + 2\cdot r\cdot A2\right)\cdot \sin(\theta)$$

(۱-۱۲)

$$\sigma\theta = \left(6\cdot A2\cdot r + 2\cdot\frac{B2}{r^3} + \frac{D2}{r}\right)\cdot \sin(\theta)$$

(۲-۱۲)

$$\tau r\theta = \left(\frac{2}{r^3}\cdot B2 - \frac{1}{r}\cdot D2 - 2\cdot r\cdot A2\right)\cdot \cos(\theta)$$

(۳-۱۲)

شرایط مرزي مشابه حالت قبلي بوده با این تفاوت كه مجموع تنشهاي برشي $\tau_{r\theta}$ در سر آزاد تیر خمیـده $\theta = 0$ برابـر P خواهد بود. بنابراین بعد از اعمال شرایط مرزي به روابط (۱۳) میرسیم:

$$\left(\frac{-2}{a^3}\cdot B2 + \frac{1}{a}\cdot D2 + 2\cdot a\cdot A2\right) = 0$$

(۱-۱۳)

$$\left(\frac{-2}{b^3}\cdot B2 + \frac{1}{b}\cdot D2 + 2\cdot b\cdot A2\right) = 0$$

(۲-۱۳)

$$t\cdot\int_a^b \left(\frac{2}{r^3}\cdot B2 - \frac{1}{r}\cdot D2 - 2\cdot r\cdot A2\right) dr = P$$

(۳-۱۳)

یا

$$\left(a^2 - b^2\right)\cdot A2 + \left(\frac{-1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right)\cdot B2 - \ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot D2 = P / t$$

(۳-۱۳)

ملاحظه میشود كه در روابط تنش ضریب C2 ظاهر نشده و بنابراین صفر خواهند بود. جایگذاري شرایط مرزي منتهـي بـه يك دستگاه ۳ معادله ۳ مجهولي میشود كه بعد از حل مقایر A2 ، B2 و D2 بدست مي آیند. بدلیل بزرگ بـودن روابـط از ذكـر آنها در اینجا خودداري میشود. براي مشاهده مي توانید به پیوست (۲) مربوطه رجـوع كنیـد. بـا جایگـذاري پارامترهـاي مجهـول، تنشهاي شعاعي، زوایه اي و برشي در هر نقطه از تیر بدست مي آید. تنشهاي بدست آمده از این قسمت را به منظور هماهنگي كل مقاله $\sigma 12_r$ و $\sigma 12_\theta$ و $\tau 12_{r\theta}$ مي نامیم.

$$\begin{pmatrix} 2\cdot a & \frac{-2}{a^3} & \frac{1}{a} \\ 2\cdot b & \frac{-2}{b^3} & \frac{1}{b} \\ a^2-b^2 & \frac{b^2-a^2}{a^2\cdot b^2} & -\ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A2 \\ B2 \\ D2 \end{pmatrix}$$ (۱۴)

۳-۱ بارگذري ممان خمشي خالص M

يك ممان خمشي خالص بر سطح آزاد تير خميده وارد ميشود. براي تحليل، اين ممان بصورت مثبت اعمال ميشود. با توجه مشابهت همانند تحليل قبلي از رابطه (۳) به بعد آغاز ميشود.

در اين حالت ممان خمشي اعمال شده در هر مقطع ثابت بوده و بنابراين به زاويه θ بستگي ندارد. پس تنشها و ϕ تنها تابعي از r خواهد بود. همچنين در اين حالت تنشهاي برشي در كل مقطع برابر صفر خواهند بود $\tau_{r\theta}=0$. يعني :

$$\phi(r,\theta)=f_3(r)$$ (۱۵)

عبارت (۱۵) را در سري روابط (۲) قرار ميدهيم:

$$\sigma r = \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{d}{dr}f1(r)\right)$$ (۱-۱۶)

$$\sigma \theta = \frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}f1(r)\right)$$ (۲-۱۶)

عبارت f3(r) كه بتواند در روابط تنش صدق كرده و مشابه قبلي معادله بايهارمونيك را براي حل عمومي ارضا كند داراي شكل (۱۷) خواهد بود:

$$f3(r)=A3.r^3+\frac{B3}{r}+C3.Lnr$$ (۱۷)

بنابراين با قرار دادن عبارت (۱۷) در روابط (۱۶) و بعد از ساده سازي خواهيم داشت:

$$\sigma r = 3\cdot A3\cdot r+\frac{C3}{r^2}-\frac{B3}{r^3}$$ (۱-۱۸)

$$\sigma \theta = 6\cdot A3\cdot r+2\cdot\frac{B3}{r^3}-\frac{C3}{r^2}$$ (۲-۱۸)

شرايط مرزي مشابه حالت قبلي بوده با اين تفاوت كه مجموع ممان تنشهاي برشي σ_θ در سر آزاد تير خميده $\theta=0$ برابر M خواهد بود. بنابراين بعد از اعمال شرايط مرزي به روابط (۱۹) ميرسيم:

$$3 \cdot A3 \cdot a + \frac{C3}{a^2} - \frac{B3}{a^3} = 0$$

(۱-۱۹)

$$3 \cdot A3 \cdot b + \frac{C3}{b^2} - \frac{B3}{b^3} = 0$$

(۲-۱۹)

$$t \cdot \int_a^b r \cdot \left(6 \cdot A3 \cdot r + 2 \cdot \frac{B3}{r^3} - \frac{C3}{r^2} \right) dr = M$$

(۳-۱۹)

يا

$$2 \cdot \left(b^3 - a^3\right) \cdot A3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot B3 + \ln\left(\frac{a}{b} \right) \cdot C3 = M / t$$

(۳-۱۹)

جايگذاري شرايط مرزي منتهي به يك دستگاه ۳ معادله ۳ مجهولي ميشود كه بعد از حل مقاير A3 ، B3 و C3 بدست مي آيند. بدليل بزرگ بودن روابط از ذكر آنها در اينجا خودداري ميشود. براي مشاهده مي توانيد به پيوست (۳) مربوطه رجوع كنيد. با جايگذاري پارامترهاي مجهول، تنشهاي شعاعي و زوايه اي در هر نقطه از تير بدست مي آيد. تنشهاي بدست آمده از اين قسمت را به منظور هماهنگي كل مقاله $\sigma 13_r$ و $\sigma 13_\theta$ و $\tau 13_{r\theta} = 0$ مي ناميم.

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot a & \frac{-1}{a^3} & \frac{1}{a^2} \\ 3 \cdot b & \frac{-1}{b^3} & \frac{1}{b^2} \\ 2 \cdot \left(b^3 - a^3\right) & 2 \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & \ln\left(\frac{a}{b} \right) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A3 \\ B3 \\ C3 \end{pmatrix}$$

(۲۰)

گرچه در واقعيت توزيع نيروي انتهايي همانند روابط بدست آمده نيست، اما حل ارائه شده در فاصله‌اي از دو انتها، مطابق با اصل سنت و نان، اعتبار لازمه را خواهد داشت. محاسبات عددي نشان مي‌دهد كه تئوري ساده شدۀ فوق در توافق خوبي با حل حقيقي مسئله مي‌باشد.

۲- استخراج روابط جابجايي

در اين قسمت مي خواهيم كه از روابط بدست آمده براي تنش در بخشهاي قبلي به روابط جابجايي برسيم. فرض در كل تحليلها حالت تنش صفحه اي مي باشد. با توجه به پيچيدگي روابط فوق، روابط جابجايي بطور مستقل براي هر كدام از بارگذاريها استخراج ميشود. درانتها مي توان با استفاده از اصل رويهم گذاري، نتايج را بهم مونتاژ كرد.

روابط تنش-كرنش براي حالت تنش صفحه‌اي بصورت روابط (۲۱) مي باشد:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\sigma_\theta\right] \quad (۱-۲۱)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right] \quad (۲-۲۱)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} \quad (۳-۲۱)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{E}\left[\sigma_\theta + \sigma_r\right] \quad (۴-۲۱)$$

همچنين روابط كرنش- تغييرمكان براي حالت تنش صفحه‌اي نيز بصورت روابط (۲۲) مي باشند. با انتگرال گيري از كرنش ها ، تغيير مكانها به ترتيب حاصل ميشوند.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \quad u_r = \int \varepsilon_r dr \quad (۱-۲۲)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad , \quad u_\theta = \int \left(r\varepsilon_\theta - u_r\right) d\theta \quad (۲-۲۲)$$

$$\gamma_{r\theta} = 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (۳-۲۲)$$

۱-۲ بارگذاري نيروي محوري F

با جايگذاري روابط (۶) در (۲۲) رابطه كرنش بر حسب پارامترهاي موجود بدست مي آيند:

$$\varepsilon r = \frac{1}{E}\cdot\left(He11(r)\cdot\cos(\theta) + He12(r)\right) \quad (۱-۲۳)$$

$$\varepsilon\theta = \frac{1}{E}\cdot\left(He21(r)\cdot\cos(\theta) + He22(r)\right) \quad (۲-۲۳)$$

كه در آنها He11(r) و He12(r) و H21(r) و H22(r) برابر خواهند بود با:

$$He11(r) := (2 - 6\cdot\nu)\cdot r\cdot A1 + (1 - 2\cdot\nu)\cdot g1 + \frac{(-2\cdot\nu - 2)}{r^3}\cdot B1 + \frac{(-\nu + 1)}{r}\cdot D1 \quad (۱-۲۴)$$

$$He12(r) := 3\cdot(2\cdot\nu - 1)\cdot r\cdot A1 + \frac{(2\cdot\nu + 1)}{r^3}\cdot B1 + \frac{(\nu - 1 - \ln(r))}{r}\cdot D1 - \frac{C1}{r} \quad (۲-۲۴)$$

$$He21(r) := 2\cdot(3 - \nu)\cdot r\cdot A1 + \frac{2\cdot(1 + \nu)}{r^3}\cdot B1 + \frac{1 - \nu}{r}\cdot D1 + (2 - \nu)\cdot g1 \quad (۳-۲۴)$$

$$He22(r) := 3\cdot(\nu - 2)\cdot r\cdot A1 - \frac{(2 + \nu)}{r^3}\cdot B1 + \frac{\nu}{r}\cdot C1 + \frac{(\nu + \nu\cdot\ln(r) - 1)}{r}\cdot D1 \quad (۴-۲۴)$$

با قرار دادن روابط (۲۳) در روابط (۲۲) و انتگرال گيري از آنها به روابط جابجايي ميرسيم. در انتگرال گيـري از ايـن روابـط گام به گام پيش ميرويم تا ثابتهاي بدست آمده در زمان انتگرال گيري را يك به يـك بدسـت آورده و در ادامـه روابـط جايگـذاري كنيم. در رابطه (۲۲-۱) ملاحظه ميشود كه انتگرال گيري نسبت به r خواهد بود. بنابراين لازم است كه در طرف دوم عبارتهـايي از θ نيز ظاهر شوند. بنابراين خواهيم داشت:

$$\mathbf{Ur} = \frac{1}{E}\cdot\left(\cos(\theta)\cdot\int He11(r)\,dr + \int He12(r)\,dr\right) + k11\cdot\sin(\theta) + k12\cos(\theta) + k13(\theta) \tag{۲۵}$$

با جايگذاري رابطه (۲۵) در (۲۲-۲) و انتگرال گيري از آن نسبت به θ ، عبارتهايي از r در طرف دوم ظاهر خواهند شد:

$$\mathbf{U\theta} = \frac{r}{E}\cdot(He21(r)\cdot\sin(\theta) + He22(r)\cdot\theta) - \frac{1}{E}\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\int He11(r)\,dr + \theta\cdot\int He12(r)\,dr\right) \ldots$$
$$+ k11\cdot\cos(\theta) - k12\sin(\theta) - \int k13(\theta)\,d\theta + k14\,r \tag{۲۶}$$

ثابتهاي k11 ، k12 ، k13 و k14 از شرايط مرزي جابجايي بدست مي آيند. با جايگذاري (۲۵) و (۲۶) در (۲۲-۳) يعنـي كرنش برشي به رابطه زير ميرسيم. همانطور كه مي دانيم در مرزهاي شعاعي $r=a$ و $r=b$ تنشهاي برشي صفر و بنـابراين كـرنش برشي نيز صفر خواهد بود. كه بعد از ساده سازيهاي مختلف به عبارت (۲۷) ميرسيم:

$$\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{d}{d\theta}k13(\theta)\right) + \frac{1}{r}\cdot\int k13(\theta)\,d\theta = \frac{-1}{E}\cdot\left[r\cdot\left(\frac{d}{dr}He21(r)\right) - He11(r)\right]\cdot\sin(\theta) + \frac{-1}{E}\cdot\left[r\cdot\left(\frac{d}{dr}He22(r)\right) - He12(r) + \frac{1}{r}\cdot\int He12(r)\,dr\right]\cdot\theta \tag{۲۷}$$

با فرضيات زير خواهيم داشت:

$$\mathbf{W11} = \frac{-r}{E}\cdot\left[r\cdot\left(\frac{d}{dr}He21(r)\right) - He11(r)\right] \tag{۲۸-۱}$$

$$\mathbf{W12} = \frac{-r}{E}\cdot\left[r\cdot\left(\frac{d}{dr}He22(r)\right) - He12(r) + \frac{1}{r}\cdot\int He12(r)\,dr\right] \tag{۲۸-۲}$$

$$\left(\frac{d}{d\theta}k13(\theta)\right) + \left(\int k13(\theta)\,d\theta\right) = W11(r)\cdot\sin(\theta) + W12(r)\cdot\theta \tag{۲۸-۳}$$

با حل معادله (۲۸-۳) به جواب (۲۹) براي k13 ميرسيم. با جايگذاري اين فرمول در (۲۵) و (۲۶) روابط جابجايي را دوباره بازسازي مي كنيم:

$$k13(\theta) = \frac{1}{2}\cdot W11(r)\cdot(\theta)\cdot\sin(\theta) + W12(r) \tag{۲۹}$$

$$\mathbf{Ur} = \frac{1}{E}\cdot\left(\cos(\theta)\cdot\int He11(r)\,dr + \int He12(r)\,dr\right) + k11\cdot\sin(\theta) + k12\cos(\theta) \ldots$$
$$+\left[\frac{1}{2}\cdot W11(r)\cdot(\theta)\cdot\sin(\theta) + W12(r)\right] \qquad (۳۰)$$

$$\mathbf{U\theta} = \frac{r}{E}\cdot\left(He21(r)\cdot\sin(\theta) + He22(r)\cdot\theta\right) - \frac{1}{E}\cdot\left(\sin(\theta)\cdot\int He11(r)\,dr + \theta\cdot\int He12(r)\,dr\right) \ldots$$
$$+k11\cdot\cos(\theta) - k12\sin(\theta) - \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\sin(\theta) - \theta\cdot\cos(\theta)\right)\cdot W11(r) + W12(r)\cdot\theta\right] + k14r \qquad (۳۱)$$

شرايط مرزي براي مسئله فوق بدين صورت استكه جابجايي شعاعي U_r و جابجايي زاويه اي U_θ در $\theta = 90$ برابر صفر ميباشد. همچنين شيب خط درگير تير خميده در $\theta = 90$ يعني $d(U_\theta)/dr$ نيز صفر است. يعني:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad then \quad u_r = u_\theta = o \quad , \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = o \qquad at \quad r = \frac{a+b}{2} \qquad (۳۲)$$

با قرار دادن شرايط مرزي ذكر شده پارامترهاي k11 ، k12 و k14 حاصل خواهد شد:

$$\mathbf{K11} = \frac{-1}{2}\cdot W11(r)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) - W12(r) - \frac{1}{E}\cdot\int He12(r)\,dr \qquad (۳۳-۱)$$

$$\mathbf{K12} = \frac{r}{E}\cdot\left(He21(r) + He22(r)\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{E}\cdot\left[\left(\int He11(r)\,dr\right) + \frac{\pi}{2}\cdot\int He12(r)\,dr\right] \ldots$$
$$+k14r - \left(\frac{1}{2}\cdot W11(r) + W12(r)\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (۳۳-۲)$$

$$\mathbf{K14} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{dr}W11(r)\right) + \left(\frac{d}{dr}W12(r)\right)\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{E}\cdot\left(He11(r) + \frac{\pi}{2}\cdot He12(r)\right) \ldots$$
$$+\left[-\left(\frac{1}{E}\cdot He21(r) + \frac{r}{E}\cdot\frac{d}{dr}He21(r)\right) - \left(\frac{1}{E}\cdot He22(r) + \frac{r}{E}\cdot\frac{d}{dr}He22(r)\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right] \qquad (۳۳-۳)$$

لازم بذكر استكه تمامي روابط (۳۳) مقادير ثابت مي باشند. يعني تابعي از r نيستند. بلكه قبل از بكارگيري در روابـط (۳۰) و (۳۱) بعد از انتگرال گيري يـا مشـتق گيـري از عبارتهـاي لازم، در $(a+b)/2$ ثابـت شـده و در آن عبـارات قـرار مـي گيرنـد.

جابجائيهاي بدست آمده از اين قسمت را به منظور هماهنگي كل مقاله $U11_r$ و $U11_\theta$ مي ناميم.

۲-۲ بارگذري نيروي برشي P

با توجه مشابهت با تحليل قبلي از رابطه (۲۱) به بعد آغاز ميشود. روابط (۱۲) را در عبارتهاي (۲۱) قرار مي دهيم:

$$\mathbf{\varepsilon r} = \left[(1 - 3\cdot\nu)\cdot r + \frac{\left[(\nu - 1)\cdot\left(a^2 + b^2\right)\right]}{r} + \frac{(1+\nu)\cdot\left(a^2\cdot b^2\right)}{r^3}\right]\cdot\frac{P\cdot\sin(\theta)}{E\cdot G\cdot t} \qquad (۳۴-۱)$$

$$\varepsilon\theta = \left[(3-\nu)\cdot r + \frac{\left[\left(a^2+b^2\right)\cdot(\nu-1)\right]}{r} - (1+\nu)\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{r^3}\right]\cdot\frac{P\cdot\sin(\theta)}{E\cdot G\cdot t} \tag{۲-۳۴}$$

مشابه حالت قبلي با قرار دادن روابط (۳۴) در روابط (۲۲) و انتگرال گيري از آنها به روابط جابجـايي ميرسـيم. در انتگـرال گيري از اين روابط نيز گام به گام پيش رفته و ثابتهاي طرف دوم را نيز استخراج مي كنيم. پس:

$$Ur = \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\nu\right)\cdot r^2 + \left(a^2+b^2\right)\cdot(\nu-1)\cdot\ln(r) - (1+\nu)\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{2\cdot r^2}\right]\cdot\frac{P\cdot\sin(\theta)}{E\cdot G\cdot t} + k21\cdot\sin(\theta) + k22\cdot\cos(\theta) + k23(\theta) \tag{۳۵}$$

$$U\theta = \left[\left(a^2+b^2\right)\cdot(1-\nu)\cdot(1-\ln(r)) + (1+\nu)\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{2\cdot r^2} - (5+\nu)\cdot\frac{r^2}{2}\right]\cdot\frac{P\cdot\cos(\theta)}{E\cdot G\cdot t} \dots$$
$$+ k21\cdot\cos(\theta) - k22\cdot\sin(\theta) - \int k23(\theta)\,d\theta + k24\cdot r \tag{۳۶}$$

ثابتهاي k21 ، k22 ، k23 و k24 از شرايط مرزي جابجايي بدست مي آيند. با جايگذاري (۳۵) و (۳۶) در (۲۲-۳) يعنـي كرنش برشي به رابطه زير ميرسيم. همانطور كه مي دانيم در مرزهاي شعاعي $r=a$ و $r=b$ تنشهاي برشي صفر و بنـابراين كـرنش برشي نيز صفر خواهد بود. كه بعد از ساده سازيهاي مختلف به عبارت (۳۷) ميرسيم:

$$\frac{d}{d\theta}k23(\theta) + \int k23(\theta)\,d\theta = \left[\frac{2\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot(\nu-1)}{r} - (1+\nu)\cdot\frac{2\cdot a^2\cdot b^2}{r^3} - 2\cdot(1+\nu)\cdot r\right]\cdot\frac{-P\cdot\cos(\theta)\cdot r}{E\cdot G\cdot t} \tag{۳۷}$$

با فرض:

$$W21 = \left[\frac{2\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot(\nu-1)}{r} - (1+\nu)\cdot\frac{2\cdot a^2\cdot b^2}{r^3} - 2\cdot(1+\nu)\cdot r\right]\cdot\frac{P\cdot r}{E\cdot G\cdot t} \tag{۱-۳۸}$$

$$\frac{d}{d\theta}k23(\theta) + \int k23(\theta)\,d\theta = -W21\cdot\cos(\theta) \tag{۲-۳۸}$$

با حل معادله (۳۸-۲) به جواب (۳۹) براي k23 ميرسيم. با جايگذاري اين فرمول در (۳۵) و (۳۶) روابط جابجايي را دوباره بازسازي مي كنيم:

$$k23(\theta) = \frac{-1}{2}\cdot W21\cdot\theta\cdot\cos(\theta) \tag{۳۹}$$

$$Ur = \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\nu\right)\cdot r^2 + \left(a^2+b^2\right)\cdot(\nu-1)\cdot\ln(r) - (1+\nu)\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{2\cdot r^2}\right]\cdot\frac{P\cdot\sin(\theta)}{E\cdot G\cdot t} \dots$$
$$+ k21\cdot\sin(\theta) + k22\cdot\cos(\theta) - \frac{1}{2}\cdot W21\cdot\theta\cdot\cos(\theta) \tag{۴۰}$$

$$U\theta = \left[\left(a^2+b^2\right)\cdot(1-\nu)\cdot(1-\ln(r)) + (1+\nu)\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{2\cdot r^2} - (5+\nu)\cdot\frac{r^2}{2}\right]\cdot\frac{P\cdot\cos(\theta)}{E\cdot G\cdot t}\ \ldots$$
$$+k21\cdot\cos(\theta) - k22\sin(\theta) + \frac{1}{2}\cdot(\cos(\theta)+\theta\cdot\sin(\theta))\cdot W21 + k24r \qquad (۴۱)$$

شرايط مرزي همانند قبلي بدين صورت استكه جابجايي شعاعي U_r و جابجـايي زاويـه اي U_θ در $\theta = 90$ برابـر صـفر ميباشد. همچنين شيب خط درگير تير خميده در $\theta = 90$ يعني $d(U_\theta)/dr$ نيز صفر است. يعني:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad then \quad u_r = u_\theta = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0 \qquad at \quad r = \frac{a+b}{2} \qquad (۴۲)$$

با قرار دادن شرايط مرزي ذكر شده پارامترهاي k21 ، k22 و k24 حاصل خواهد شد:

$$K21 = \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\nu\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(a^2+b^2\right)\cdot(\nu-1)\cdot\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - (1+\nu)\cdot\frac{2\cdot a^2\cdot b^2}{(a+b)^2}\right]\cdot\frac{-P}{E\cdot G\cdot t} \qquad (۱-۴۳)$$

$$K22 = \frac{\pi}{4}\cdot W21 \qquad (۲-۴۳)$$

$$K24 = 0 \qquad (۳-۴۳)$$

لازم بذكر استكه تمامي روابط (۴۳) مقادير ثابت مي باشند. يعني تابعي از r نيستند. بلكه قبل از بكارگيري در روابـط (۴۰) و (۴۱) بعد از انتگرال گيـري يـا مشـتق گيـري از عبارتهـاي لازم، در $(a+b)/2$ ثابـت شـده و در آن عبـارات قـرار مـي گيرنـد. جابجائيهاي بدست آمده از اين قسمت را به منظور هماهنگي كل مقاله $U12_r$ و $U12_\theta$ مي ناميم.

۳-۲ بارگذري ممان خمشي M

با توجه مشابهت با تحليل قبلي از رابطه (۲۱) به بعد آغاز ميشود. روابط (۱۸) را در عبارتهاي (۲۱) قرار مي دهيم:

$$\varepsilon r = \frac{1}{E}\cdot\left[(3-6\cdot\nu)\cdot r\cdot A3 + \frac{(-1-2\cdot\nu)}{r^3}\cdot B3 + \frac{(\nu+1)}{r^2}\cdot C3\right] \qquad (۱-۴۴)$$

$$\varepsilon\theta = \frac{1}{E}\cdot\left[(6-3\cdot\nu)\cdot r\cdot A3 + \frac{(2+\nu)}{r^3}\cdot B3 + \frac{(-\nu-1)}{r^2}\cdot C3\right] \qquad (۲-۴۴)$$

مشابه حالت قبلي با قرار دادن روابط (۴۴) در روابط (۲۲) و انتگرال گيري از آنها به روابط جابجـايي ميرسـيم. در انتگـرال گيري از اين روابط نيز گام به گام پيش رفته و ثابتهاي طرف دوم را نيز استخراج مي كنيم. پس:

$$Ur = \frac{1}{E}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(3-6\cdot\nu)\cdot r^2\cdot A3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1-2\cdot\nu)}{r^2}\cdot B3 - \frac{(\nu+1)}{r}\cdot C3\right] + (k13\sin(\theta) + k32\cos(\theta) + k33(\theta)) \qquad (۴۵)$$

$$U\theta = \frac{1}{E}\cdot\left(\frac{9}{2}\cdot r^2\cdot A3 + \frac{3}{2\cdot r^2}\cdot B3\right)\cdot\theta + \left(k13\cos(\theta) - k32\sin(\theta)\right) - \int k33(\theta)\,d\theta + k34\,r$$ (۴۶)

ثابتهاي k31 ، k32 ، k33 و k34 از شرايط مرزي جابجايي بدست مي آيند. با جايگذاري (۴۵) و (۴۶) در (۲۲-۳) يعني كرنش برشي به رابطه زير ميرسيم. همانطور كه مي دانيم تنشهاي برشي در كليه نقاط تير صفر و بنابراين كرنش برشي نيز صفر خواهد بود. كه بعد از ساده سازيهاي مختلف به عبارت (۴۷) ميرسيم:

$$\frac{d}{d\theta}k33(\theta) + \int k33(\theta)\,d\theta = \frac{9}{2}\cdot\frac{r}{E}\cdot\left(\frac{1}{r^3}\cdot B3 - r\cdot A3\right)\cdot\theta$$ (۴۷)

با فرض:

$$W31 = \frac{9}{2}\cdot\frac{r}{E}\cdot\left(\frac{1}{r^3}\cdot B3 - r\cdot A3\right)$$ (۱-۴۸)

$$\frac{d}{d\theta}k33(\theta) + \int k33(\theta)\,d\theta = W31\cdot\theta$$ (۲-۴۸)

با حل معادله (۲-۴۸) به جواب (۴۹) براي k33 ميرسيم. با جايگذاري اين فرمول در (۴۵) و (۴۶) روابط جابجايي را دوباره بازسازي مي كنيم:

$$k33(\theta) = W31$$ (۴۹)

$$Ur = \frac{1}{E}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(3 - 6\cdot\nu)\cdot r^2\cdot A3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1 - 2\cdot\nu)}{r^2}\cdot B3 - \frac{(\nu + 1)}{r}\cdot C3\right] + \left(k13\sin(\theta) + k32\cos(\theta) + W31\right)$$ (۵۰)

$$U\theta = \frac{1}{E}\cdot\left(\frac{9}{2}\cdot r^2\cdot A3 + \frac{3}{2\cdot r^2}\cdot B3\right)\cdot\theta + \left(k13\cos(\theta) - k32\sin(\theta)\right) - W31\cdot\theta + k34\,r$$ (۵۱)

شرايط مرزي همانند قبلي بدين صورت استكه جابجايي شعاعي U_r و جابجـايي زاويـه اي U_θ در $\theta = 90$ برابـر صـفر ميباشد. همچنين شيب خط درگير تير خميده در $\theta = 90$ يعني $d(U_\theta)/dr$ نيز صفر است. يعني:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad then \quad u_r = u_\theta = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0 \qquad at \quad r = \frac{a+b}{2}$$ (۵۲)

با قرار دادن شرايط مرزي ذكر شده پارامترهاي k31 ، k32 و k34 حاصل خواهد شد:

$$K31(r) = \frac{-1}{E}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(3 - 6\cdot\nu)\cdot r^2\cdot A3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1 - 2\cdot\nu)}{r^2}\cdot B3 - \frac{(\nu + 1)}{r}\cdot C3\right] - W31$$ (۱-۵۳)

$$K32(r) = \frac{1}{E}\cdot\left(\frac{9}{2}\cdot r^2\cdot A3 + \frac{3}{2\cdot r^2}\cdot B3\right)\cdot\frac{\pi}{2} + k34r - W31\cdot\frac{\pi}{2}$$ (۲-۵۳)

$$K34(r) = \frac{-1}{E}\cdot\left(9\cdot r\cdot A3 - \frac{3}{r^3}\cdot B3\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$ (۳-۵۳)

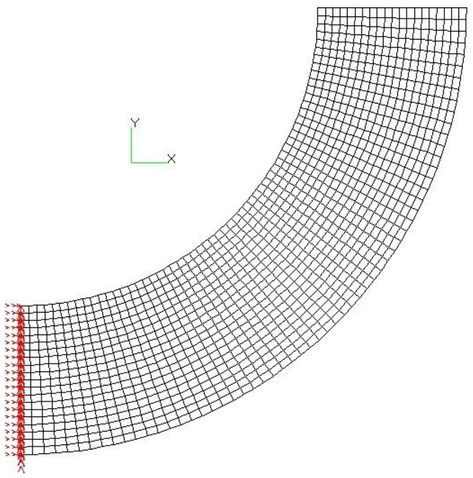
لازم بذكر استكه روابط (۵۳) تابعي از r بوده و همانند روابط مشابه بالايي ثابت نيستند. جابجائيهـاي بدسـت آمـده از ايـن قسمت را به منظور هماهنگي كل مقاله $U13_r$ و $U13_\theta$ مي ناميم. در اينجا استخراج روابط تحليلي تنش و جابجايي بـراي تيـر خميدهٔ با هندسه ثابت و ساختار همگن به پايان رسيد.

۳- ارائه مثال و مقايسه نتايج روش تحليلي با روش المان محدود

براي اثبات درستي روابط بدست آمده، يك مثال براي هر كدام از بارگذاريها بـا روش .F.E در نـرم افـزار Msc.Nastran حل شده و نتايج بدست آمده براي مقايسه بصورت جدولي در انتهاي هر قسمت ارائه شده است. در هر بخش چگونگي توزيع نيـرو در سر آزاد تير توضيح داده شده و بمنظور ارائه نتايج مناسب و مقايسه اي خوب، از ارائه نتايج نزديك به دو انتهاي تير صـرف نظـر شده است. بنابراين براي دوري از نواحي تمركز تنش، شعاع و زواياي انتخاب شده در وسط تير قرار دارند. كـه بـدين منظـور بـراي زوايا ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و براي شعاع ۹۰۰ ، ۱۰۰۰ و ۱۱۰۰ انتخاب شده است. البته در نرم افزار فـوق كليـه نقـاط قابـل دسترسـي و محاسبه است. همچنين لازم بذكر استكه كليه نتايج تحليلي در نرم افزار MathCAD حاصل و از آن استخراج شده است.

شكل -۱، شبكه بندي شده تير خميده كه در حقيقت، شكل كلي تير در هر دو نرم افزار را نشان ميدهد. تير خميده مـورد تحليل در هر دو نرم افزار داراي شعاع كوچك برابر ۸۰۰ و شعاع بزرگ برابـر ۱۲۰۰ و گسـتره، از زاويـه صـفر تـا ۹۰بصـورت ذيـل ميباشد:

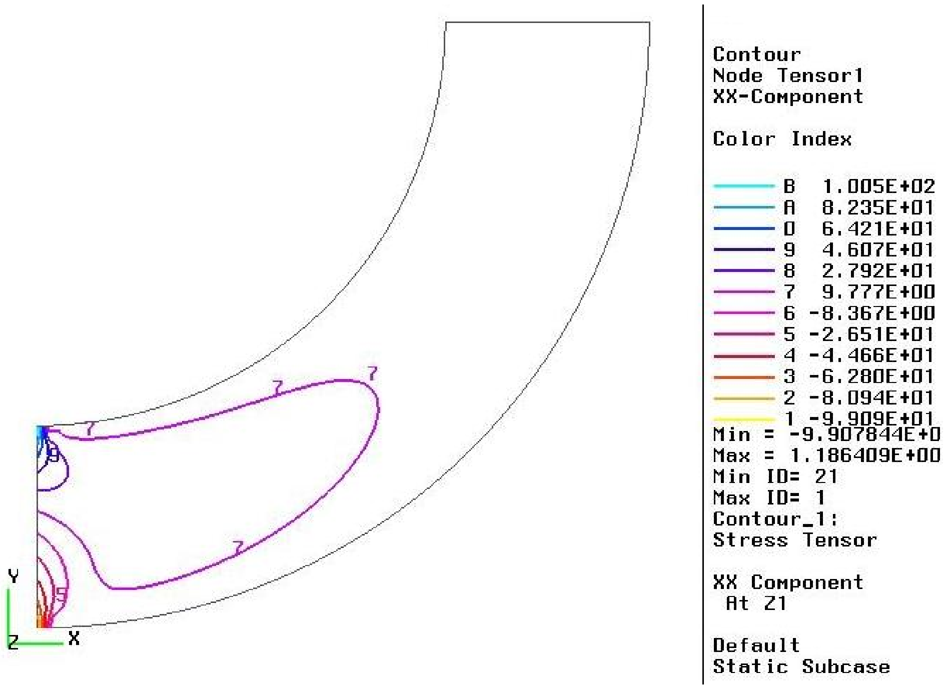
$a = 800(mm)$, $b = 1200(mm)$, $t = 5(mm)$, $E = 72000(Mpa)$, $\nu = 0.33$



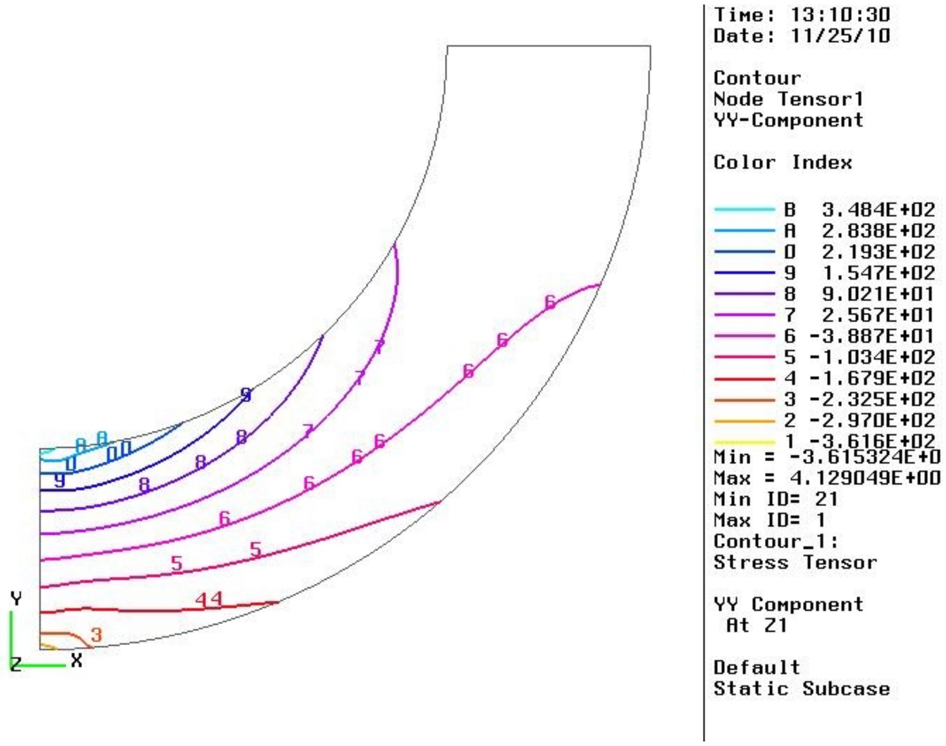
شكل -۱ : شبكه بندي تير خميده و شكل كلي آن براي تحليل

۱-۳ بارگذاري نيروي محوري $F = -40000(N)$

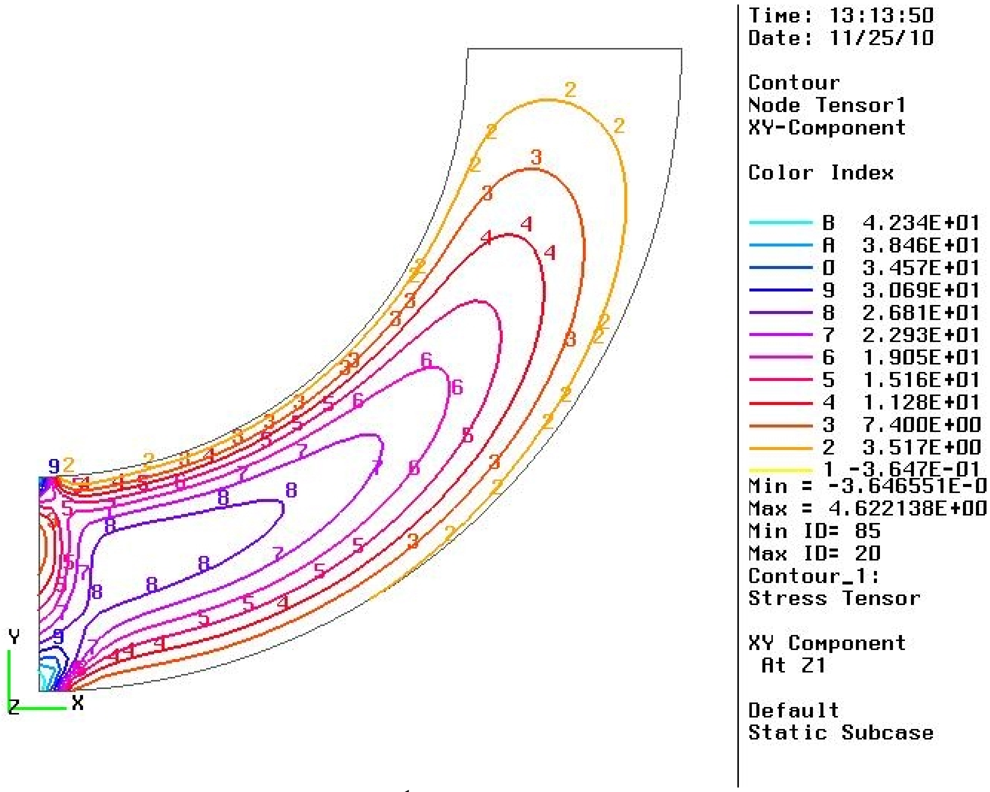
يك نيروي گسترده عمودي روي سطح آزاد تير خميده به مقدار كل ۴۰۰۰۰- نيوتن، كه در دو گوشة سطح آزاد به منظـور توزيع يكنواخت تنش نيروي روي گره ها نصف ديگر گره ها قرار داده شده است.



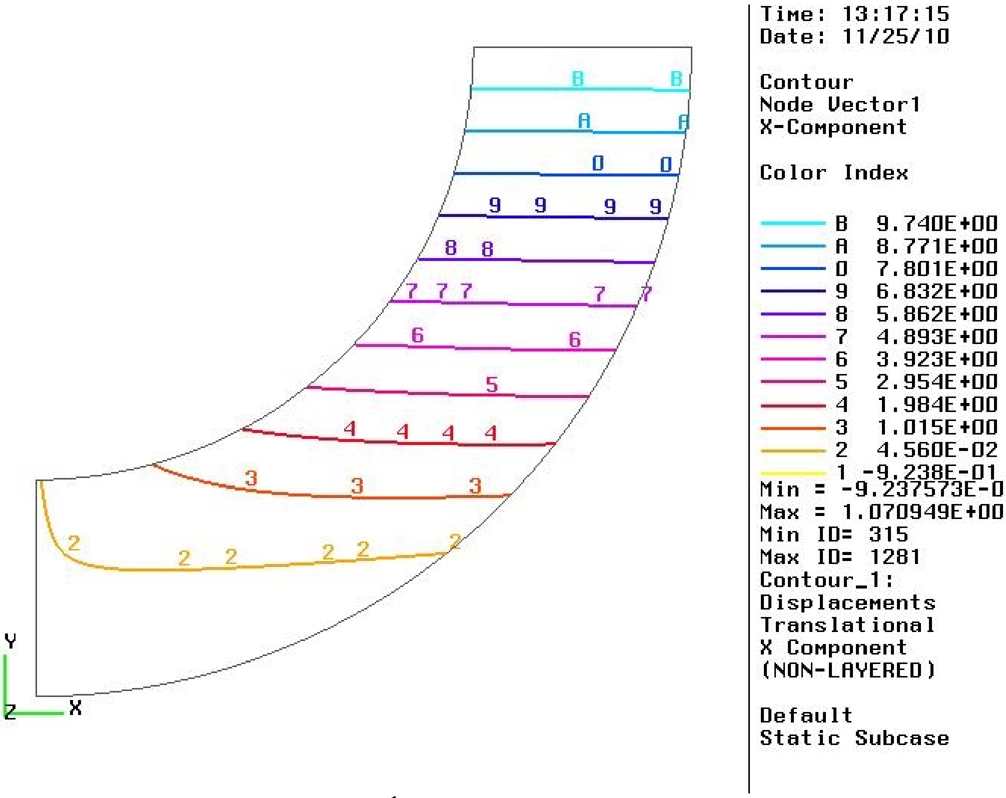
شكل -۲ : تنشهاي شعاعي در بارگذاري محوري



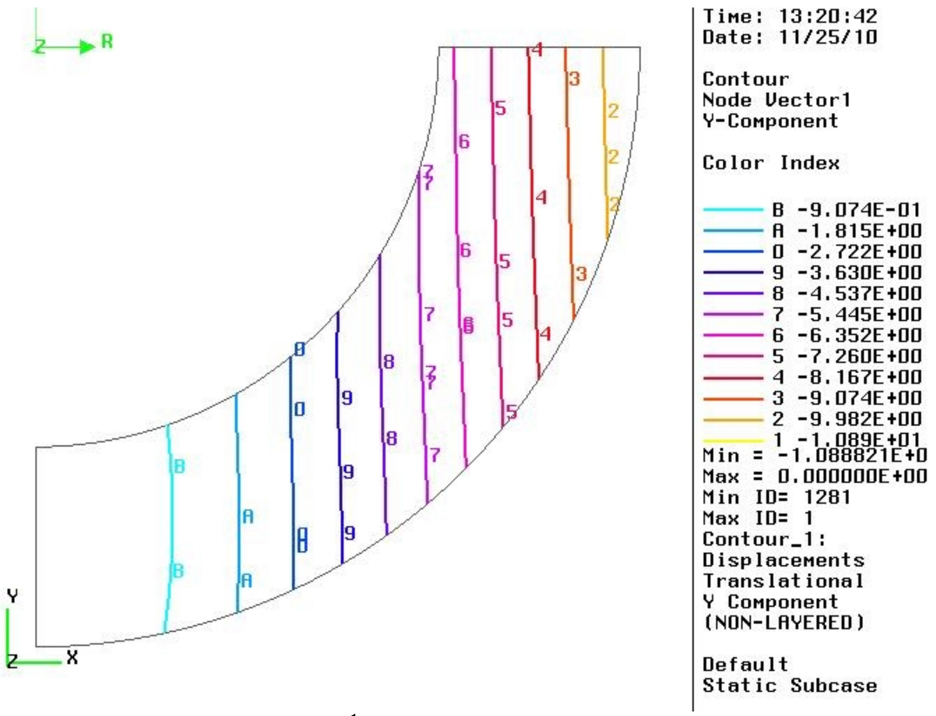
شكل -۳ : تنشهاي زوايه اي در بارگذاري محوري



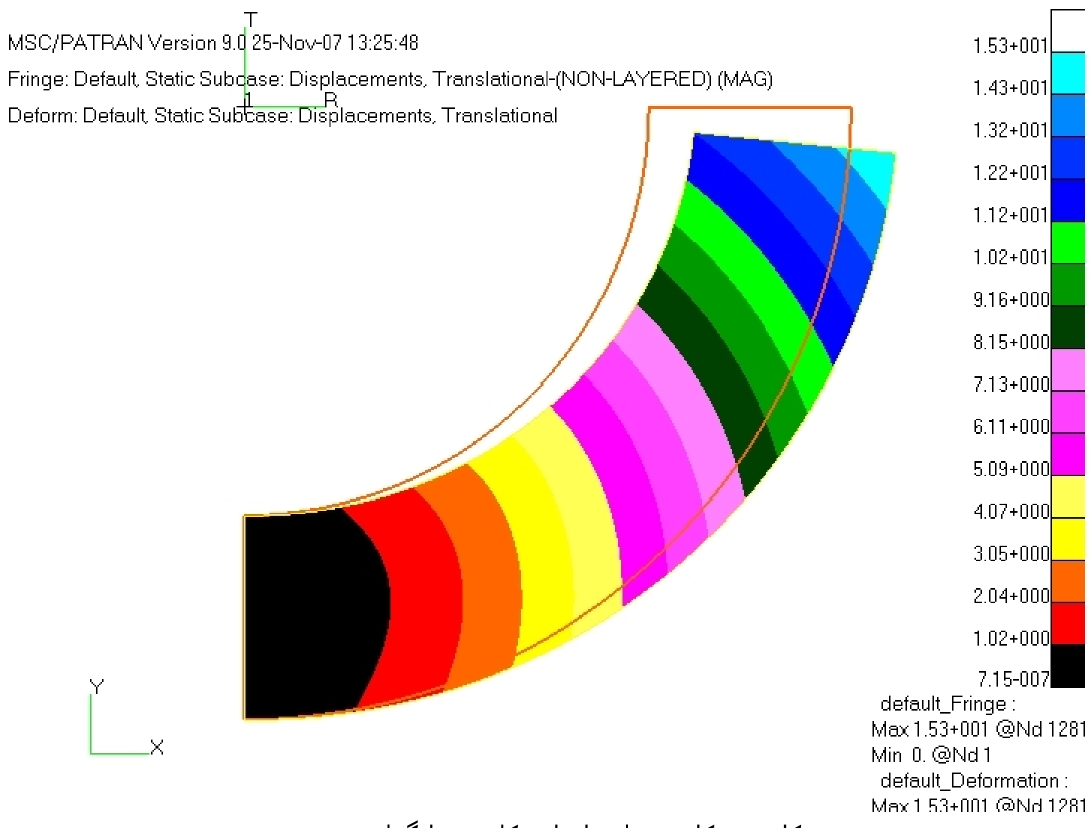
شكل -۴ : تنشهاي برشي در بارگذاري محوري



شكل -۵ : جابجائيهاي شعاعي در بارگذاري محوري



شكل -۶ : جابجائيهاي زاويه اي در بارگذاري محوري



شكل -۷ : كانتوري از جابجايي كلي در بارگذاري محوري

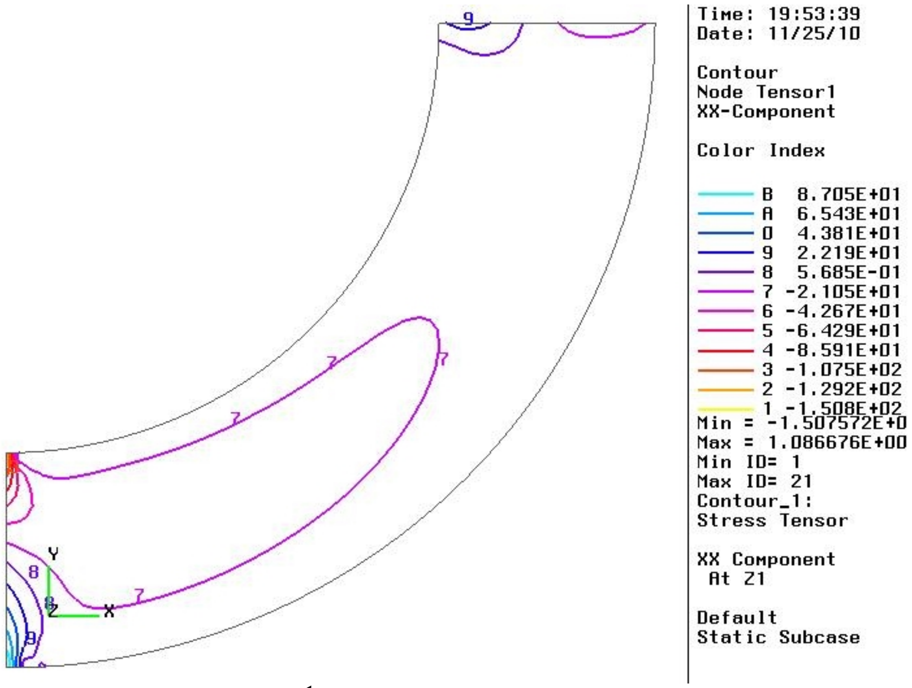
		r=900(mm)			r=1000(mm)			r=1100(mm)		
		$\theta = 30°$	$\theta = 45°$	$\theta = 60°$	$\theta = 30°$	$\theta = 45°$	$\theta = 60°$	$\theta = 30°$	$\theta = 45°$	$\theta = 60°$
σ_r	F.E.	3.2	7.5	13.2	4.5	9.1	15.3	3.3	6.2	10.0
	Analysis	3.2	7.5	13.1	4.5	9.1	15.2	3.4	6.3	10.0
σ_θ	F.E.	2.5	28.0	61.5	-20.0	-20.0	-20.0	-38.3	-59.3	-86.7
	Analysis	1.7	27.3	60.8	-19.9	-19.8	-19.8	-37.7	-58.7	-86.1
$\tau_{r\theta}$	F.E.	13.5	19.0	23.5	14.6	20.6	25.2	9.0	12.8	15.6
	Analysis	13.5	19.1	23.5	14.6	20.7	25.3	9.0	12.8	15.7
U_r	F.E.	7.30	4.93	2.92	7.30	4.64	2.63	7.32	4.97	2.67
	Analysis	7.44	5.01	2.66	7.35	4.94	2.62	7.6	5.1	2.75
U_θ	F.E.(*)	-2.31	-0.75	0.1	-3.50	-1.77	-0.70	-4.61	-2.80	-1.50
	Analysis	2.18	0.59	-0.28	3.47	1.78	0.71	4.57	2.71	1.38

(*) اختلاف مثبت يا منفي ناشي از مختصات انتخاب شده در نرم افزار است.

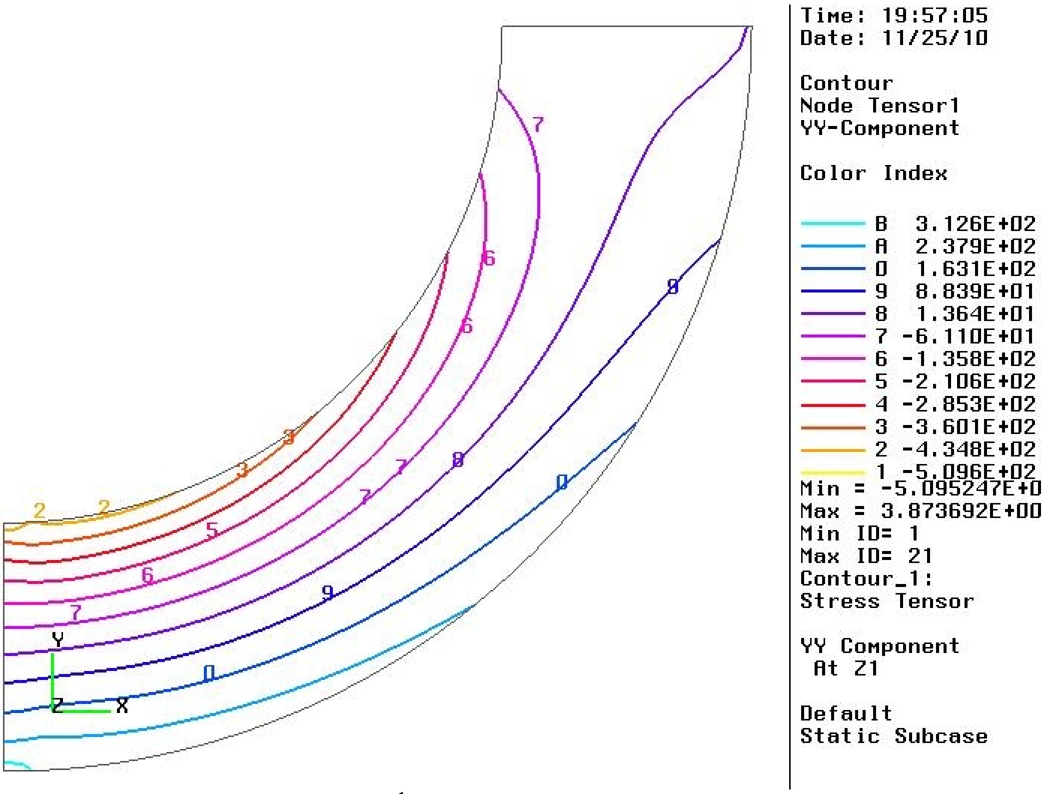
جدول – ۱ : مقايسه نتايج روش تحليلي و روش المان محدود براي تنشها و جابجائيها در نقاط مشخص در بارگذاري محوري

۲-۳ بارگذاري نيروي برشي $P = 50000(N)$

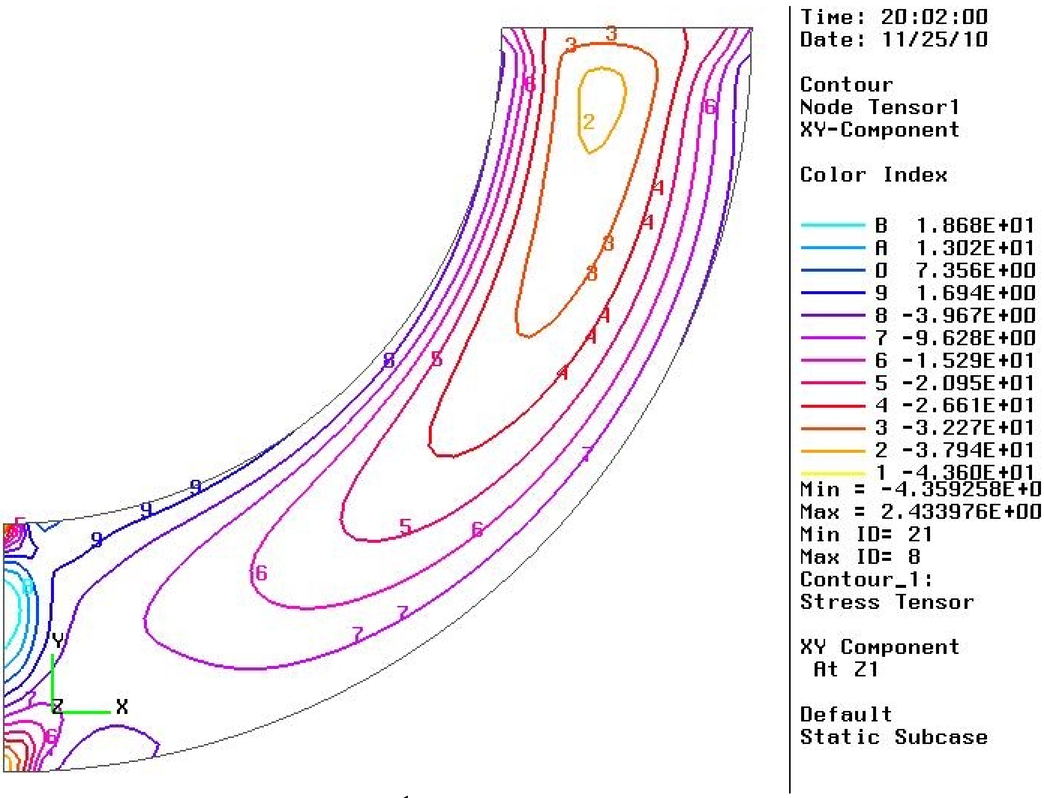
يك نيروي گسترده برشي روي سطح آزاد تير خميده به مقدار كل ۵۰۰۰۰ نيوتن، كه در دو گوشة سطح آزاد بـه منظـور توزيع يكنواخت تنش نيروي روي گره ها نصف ديگر گره ها قرار داده شده است.



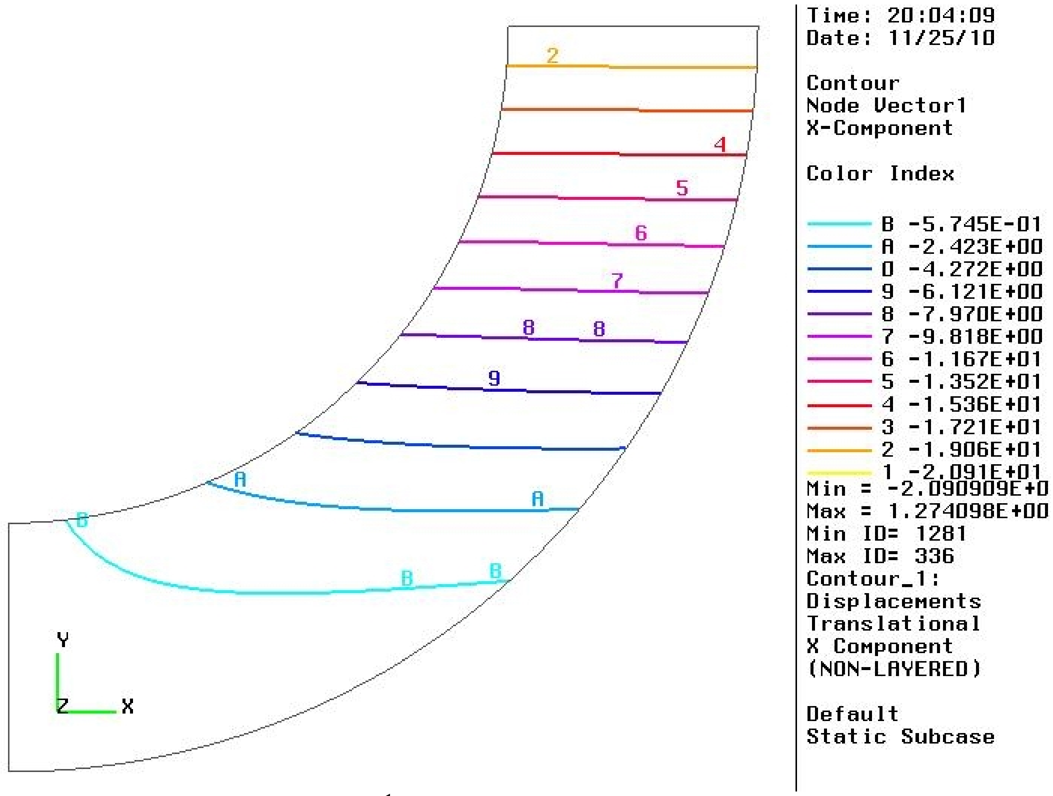
شكل -۸ : تنشهاي شعاعي در بارگذاري برشي



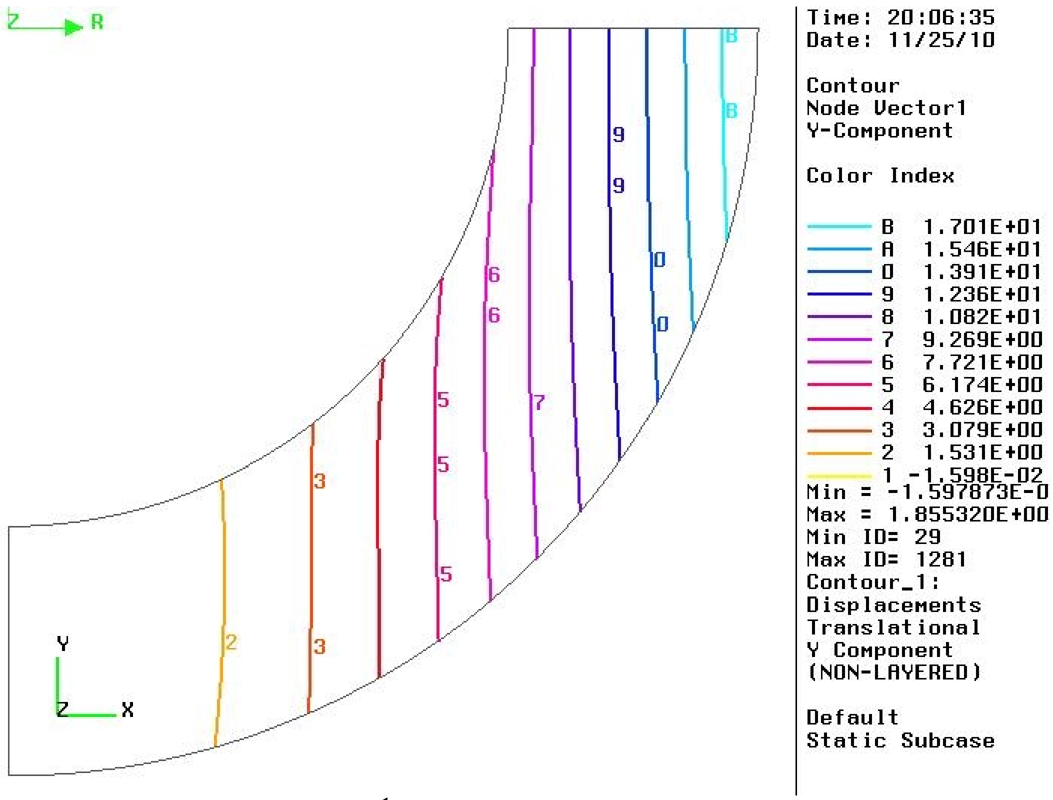
شكل - ۹ : تنشهاي زوايه اي در بارگذاري برشي



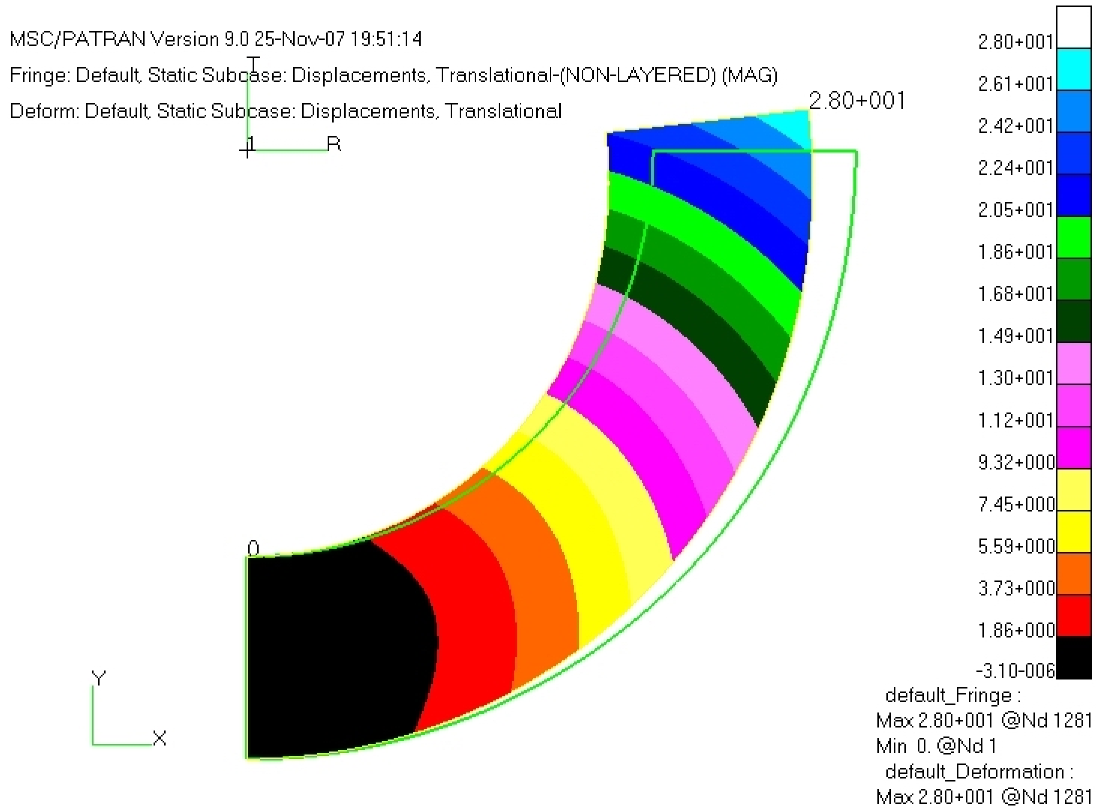
شكل - ۱۰ : تنشهاي برشي در بارگذاري برشي



شكل - ۱۱ : جابجائيهاي شعاعي در بارگذاري برشي



شكل -۱۲ : جابجائيهاي زاويه اي در بارگذاري برشي



شكل -۱۳ : كانتوري از جابجايي كلي در بارگذاري برشي

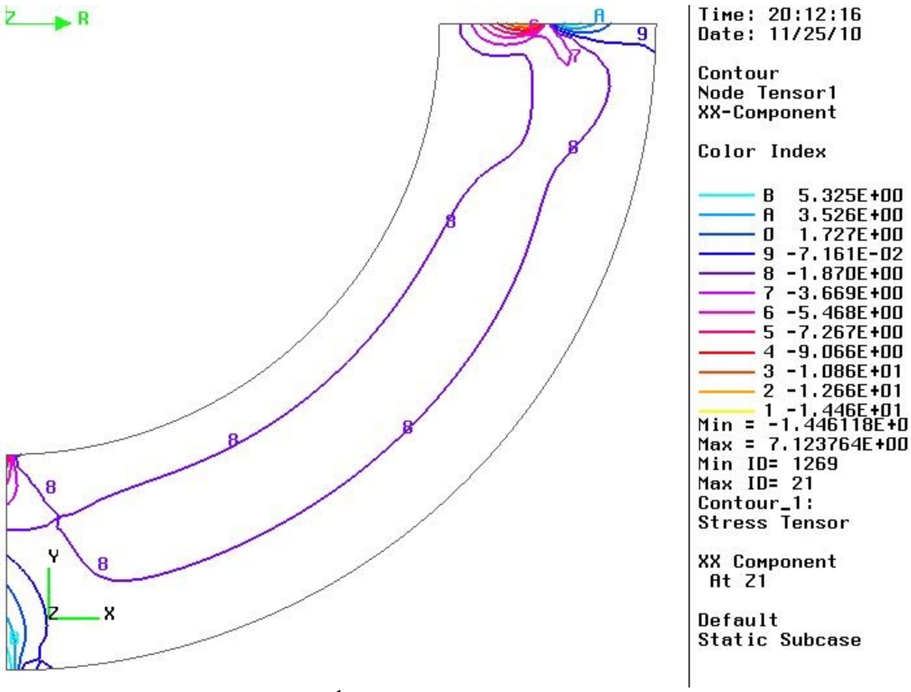
		r=900(mm)			r=1000(mm)			r=1100(mm)		
		$\theta = 30°$	$\theta = 45°$	$\theta = 60°$	$\theta = 30°$	$\theta = 45°$	$\theta = 60°$	$\theta = 30°$	$\theta = 45°$	$\theta = 60°$
σ_r	***F.E.***	**-16.8**	**-23.8**	**-29.2**	**-18.1**	**-25.7**	**-31.6**	**-11.3**	**-16.0**	**-19.6**
	Analysis	**-16.9**	**-23.9**	**-29.3**	**-18.3**	**-25.8**	**-31.6**	**-11.4**	**-16.0**	**-19.7**
σ_θ	***F.E.***	**-100.7**	**-142.5**	**-174.5**	**-0.1**	**-0.15**	**-0.1**	**82.6**	**116.9**	**143.1**
	Analysis	**-100.9**	**-142.7**	**-174.8**	**-0.2**	**-0.26**	**-0.32**	**82.6**	**116.8**	**143.1**
$\tau_{r\theta}$	***F.E.(*)***	**-29.2**	**-23.8**	**-16.9**	**-31.5**	**-25.7**	**-18.1**	**-19.6**	**-16.0**	**-11.2**
	Analysis	**29.3**	**23.9**	**16.9**	**31.6**	**25.8**	**18.2**	**19.6**	**16.0**	**11.3**
U_r	***F.E.***	**-11.98**	**-7.31**	**-3.41**	**-11.98**	**-7.31**	**-3.41**	**-12.02**	**-7.37**	**-3.48**
	Analysis	**-12.1**	**-7.31**	**-.344**	**-12.1**	**-7.32**	**-3.4**	**-12.2**	**-7.40**	**-3.5**
U_θ	***F.E.(*)***	**2.42**	**0.28**	**-0.60**	**4.62**	**2.08**	**0.66**	**6.83**	**3.88**	**1.94**
	Analysis	**-2.53**	**-0.3**	**-0.58**	**-4.74**	**-2.1**	**-0.69**	**-6.96**	**-3.9**	**-19.6**

(*) اختلاف مثبت يا منفي ناشي از مختصات انتخاب شده در نرم افزار است.

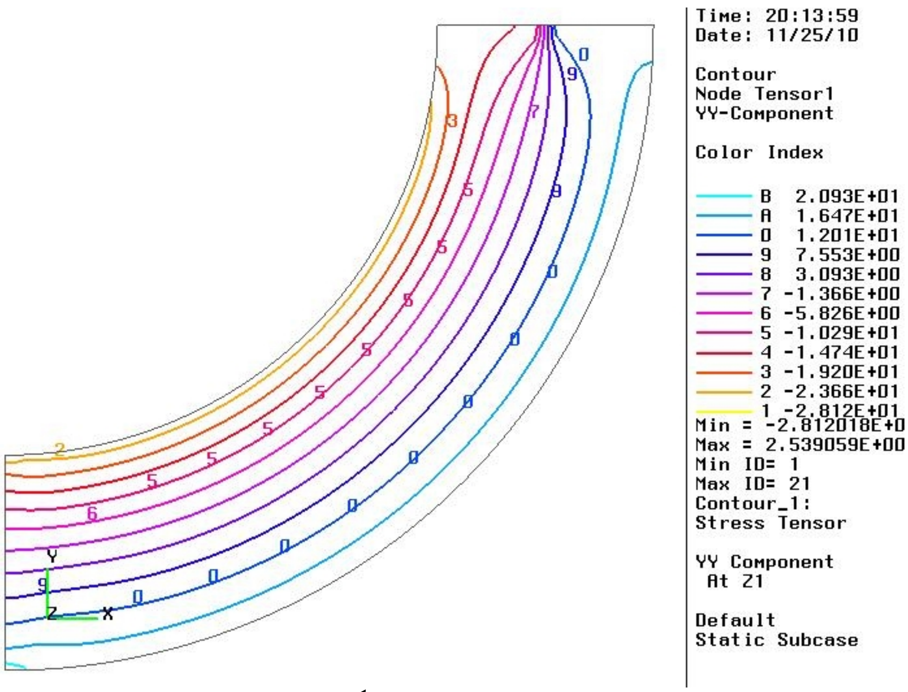
جدول – ۲ : مقايسه نتايج روش تحليلي و روش المان محدود براي تنشها و جابجائيها در نقاط مشخص در بارگذاري برشي

۳-۳ بارگذاري ممان خمشي $M = 3.0 \times 10^6 (N.mm)$

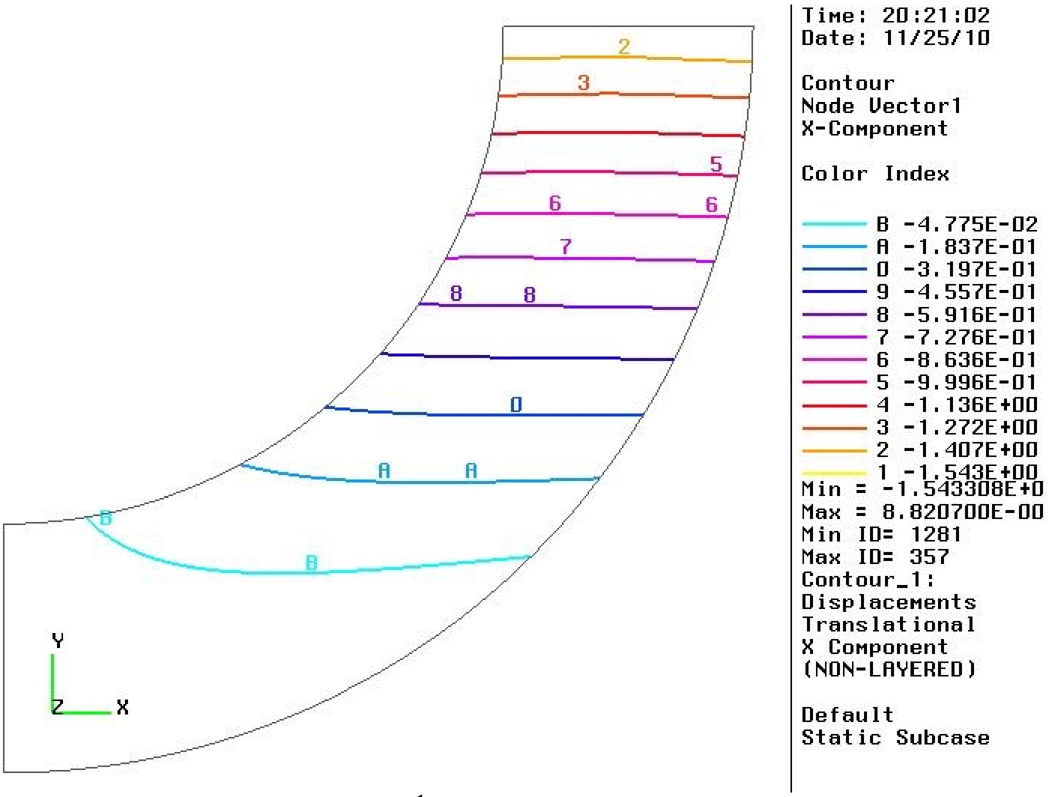
يك ممان خمشي بصورت يك كوپل نيرو گسترده عمودي روي سطح آزاد تير خميده به مقدار كـل ۳ مگـانيوتن-ميليمتـر قرار داده شده است. در دو گوشة سطح آزاد به منظور توزيع يكنواخت تنش نيروي روي گره ها نصف ديگر گره ها است.



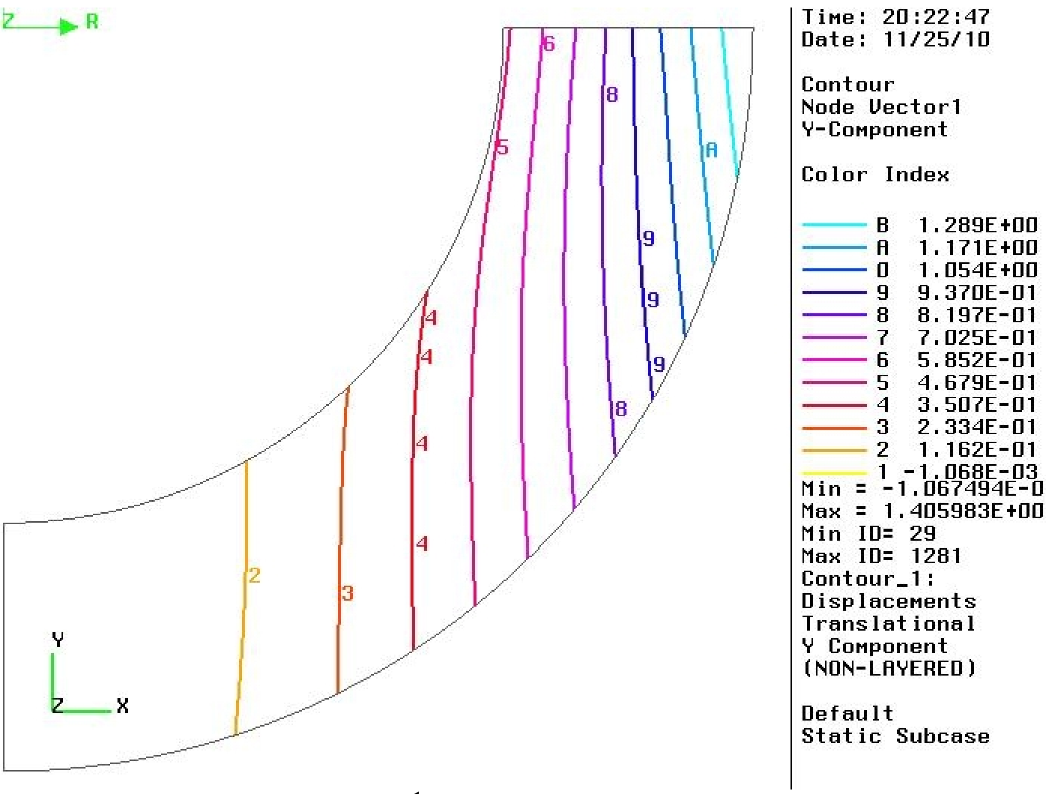
شكل -۱۴ : تنشهاي شعاعي در بارگذاري ممان خمشي



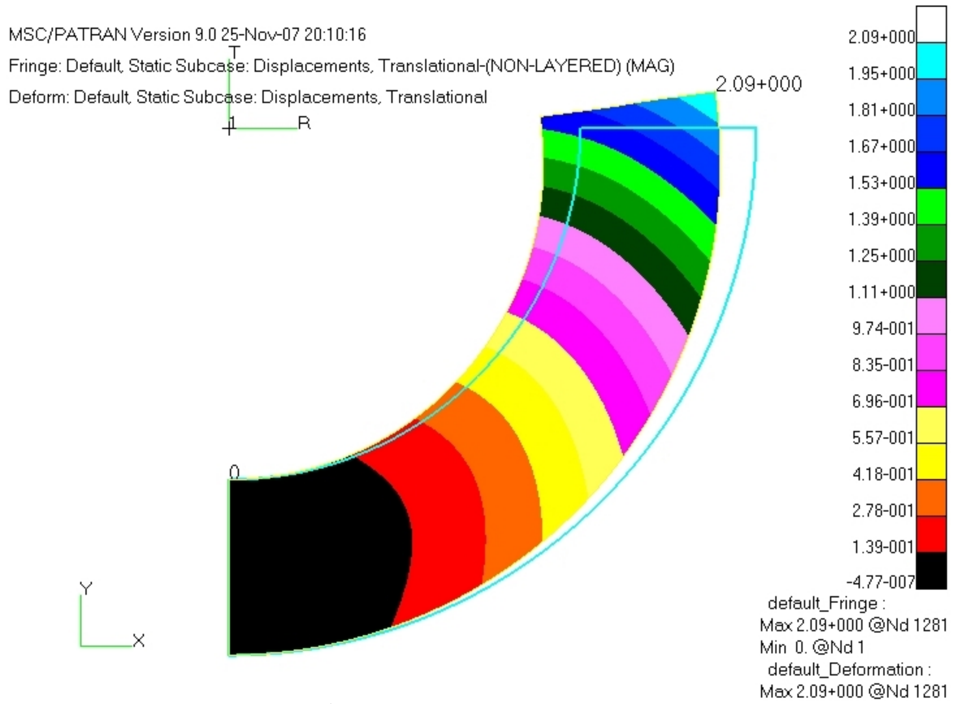
شكل - ۱۵ : تنشهاي زاويه اي در بارگذاري ممان خمشي



شکل - ۱۶ : جابجائيهاي شعاعي در بارگذاري ممان خمشي



شکل -۱۷ : جابجائيهاي زاويه اي در بارگذاري ممان خمشي



شكل -۱۸ : كانتوري از جابجايي كلي در بارگذاري ممان خمشي

		r=900(mm)			r=1000(mm)			r=1100(mm)		
		$\theta=30°$	$\theta=45°$	$\theta=60°$	$\theta=30°$	$\theta=45°$	$\theta=60°$	$\theta=30°$	$\theta=45°$	$\theta=60°$
σ_r	**F.E.**	-1.98	-1.99	-2.00	-2.21	-2.23	-2.24	-1.41	-1.42	-1.43
	Analysis	-2.1	-2.1	-2.1	-2.2	-2.2	-2.2	-1.3	-1.3	-1.3
σ_θ	**F.E.**	-10.65	-10.65	-10.65	1.50	1.50	1.50	11.50	11.50	11.50
	Analysis	-9.82	-9.82	-9.82	2.96	2.96	2.96	11.50	11.50	11.50
$\tau_{r\theta}$	**F.E.**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	Analysis	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
U_r	**F.E.**	-0.76	-0.44	-0.20	-0.76	-0.44	-0.20	-0.76	-0.44	-0.20
	Analysis	-0.38	-0.25	-0.1	-0.72	-0.42	-0.19	-0.60	-0.35	-0.16
U_θ	**F.E.(*)**	0.14	0.02	-0.03	0.30	0.14	0.05	0.47	0.26	0.13
	Analysis	-0.99	-0.70	-0.44	-0.31	-0.15	-0.06	-0.41	-0.23	-0.12

(*) اختلاف مثبت يا منفي ناشي از مختصات انتخاب شده در نرم افزار است.

جدول – ۳ : مقايسه نتايج روش تحليلي و روش المان محدود براي تنشها و جابجائيها در نقاط مشخص در بارگذاري خمشي

۴- مراجع

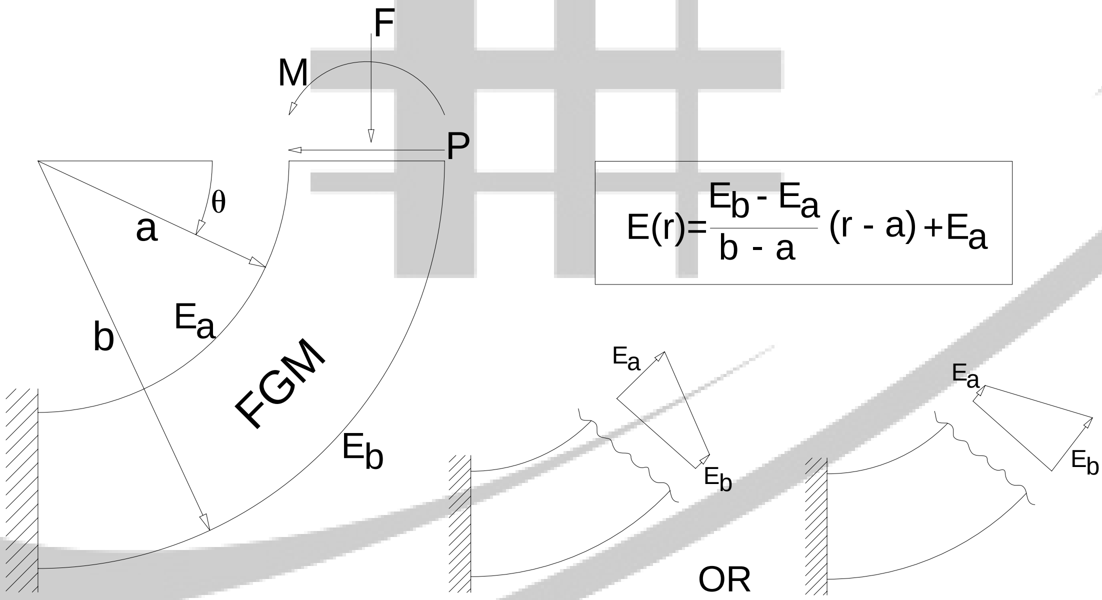
۱- "جزوه درسي الاستيسيته" ، دكتر غلامحسين رحيمي .

2- "Theory of Elasticity", By: S. Timoshenko and J.N. Goodier.

۳- " مقاومت پيشرفته و الاستيسيته كاربردي " ، دكتر محمود شاكري .

پروژه (۲)

تیر خمیده یک سرگیردار
تحت بارهای انتهایی
با هندسه ثابت و مواد FGM

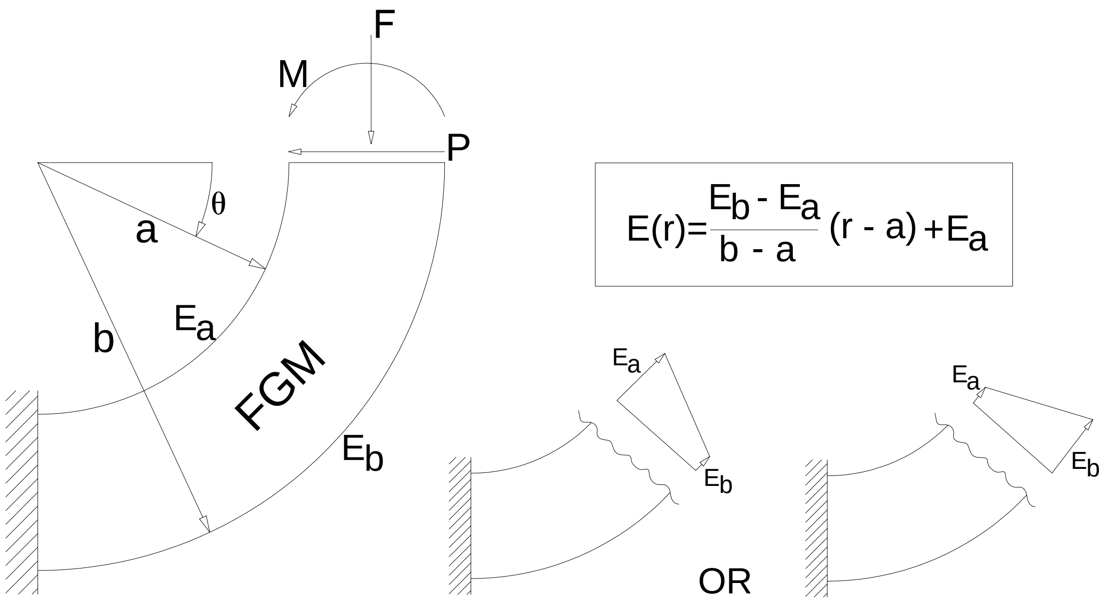


$$E(r)=\frac{E_b - E_a}{b - a}(r - a)+E_a$$

فهرست عناوین

تير خميده يك سرگيردار تحت بارهاي انتهايي با هندسه ثابت و مواد FGM

بهروز حسين پور بناب
گروه هوافضا- دانشكده فني مهندسي
دانشگاه تربيت مدرس
b_hosseinpour2003@Yahoo.com



يك تير يك سرگيردارساخته شده از مواد FGM كه فرض ميشود بخشي از يك كمان دايره اي باشد، تحت بارهاي انتهايي قرار گرفته است. ممان خمشي اعمال شده در هر مقطع متناسب با زاويه θ و البته با $\sin\theta$ و $Cos\theta$ خواهد بود. با توجه به شكل مسئله بايد از مختصات قطبي استفاده شود. تغييرات مدول الاستيسيته در پهناي تير كه در حالت تنش صفحه اي حل خواهد شد، ميتواند بصور مختلفي باشد. در گام اول، بمنظور تسهيل و سادگي در استخراج روابط، تغييرات مدول الاستيسيته خطي فرض ميشود. يعني در شعاع a داراي مدول الاستيسيته Ea و در شعاع b داراي مدول الاستيسيته Eb (طبق شكل) خواهد بود. اين تغييرات ميتواند از كم به زياد يا برعكس باشد.

۱- استخراج معادله ديفرانسيل حاكم بر تير خميده FGM

با توجه به اينكه مواد و مدول الاستيسيته متغير ميباشد، بنابراين نمي توان از معادله بايهارمونيك مستقيما براي حل استفاده كرد. پس براي شروع از معادله سازگاري دوبعدي براي مختصات قطبي شروع مي كنيم كه بايد تمام كرنشها در هر حال بايد آنرا رعايت كنند. رابطه حاكم بر مدول الاستيسيته بصورت (۱) در نظر گرفته شده است:

$$E(r)=\frac{E_b-E_a}{b-a}(r-a)+E_a=et(r-a)+E_a$$
$$\frac{d[E(r)]}{dr}=et \quad \text{constant} \tag{۱}$$

همچنين معادله سازگاري بر حسب كرنشها در مختصات قطبي براي حالت دوبعدي:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varepsilon_\theta(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varepsilon_r(r,\theta)+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon_\theta(r,\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon_r(r,\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_{r\theta}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_{r\theta}(r,\theta) \tag{۲}$$

يا

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varepsilon_\theta(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varepsilon_r(r,\theta)+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon_\theta(r,\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon_r(r,\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_{r\theta}(r,\theta)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\gamma_{r\theta}(r,\theta)=0 \tag{۳}$$

روابط تنش-كرنش براي حالت تنش صفحه‌اي :

$$\varepsilon_r(r,\theta)=\frac{1}{E(r)}\left[\sigma_r(r,\theta)-\nu\sigma_\theta(r,\theta)\right] \tag{۱-۴}$$

$$\varepsilon_\theta(r,\theta)=\frac{1}{E(r)}\left[\sigma_\theta(r,\theta)-\nu\sigma_r(r,\theta)\right] \tag{۲-۴}$$

$$\varepsilon_{r\theta}(r,\theta)=\frac{1+\nu}{E(r)}\tau_{r\theta}(r,\theta) \quad \text{or} \quad \gamma_{r\theta}=\frac{2(1+\nu)}{E(r)}\tau_{r\theta}(r,\theta)=\frac{1}{G(r)}\tau_{r\theta}(r,\theta) \tag{۳-۴}$$

مشتقهاي مربوط به ε_r و ε_θ و $\gamma_{r\theta}$ را نسبت به r و θ گرفته و در معادله سازگاري قرار ميدهيم(مشتق گيريهاي ذكر شده در فايل MathCAD - پيوست - موجود است). بعد از ساده سازي و مرتب كردن جملات مشابه خواهيم داشت:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{E(r)}\left\{\begin{aligned}&-r\nu\frac{\partial^2\sigma_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\sigma_r}{\partial\theta^2}+r\frac{\partial^2\sigma_\theta}{\partial r^2}-\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2\sigma_\theta}{\partial\theta^2}-2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{r\theta}}{\partial\theta\partial r}+\left(2r\nu\frac{et}{E(r)}-1-2\nu\right)\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\\&+\left(2+\nu-2r\frac{et}{E(r)}\right)\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial r}+2(\nu+1)\left(\frac{et}{E(r)}-\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}\\&+\left[2r\frac{et^2}{E(r)^2}-(\nu+2)\frac{et}{E(r)}\right]\sigma_\theta-\left[2r\nu\frac{et^2}{E(r)^2}-(2\nu+1)\frac{et}{E(r)}\right]\sigma_r\end{aligned}\right\}=0 \tag{۵}$$

معادله فوق يك معادله ديفرانسيل مرتبه دو بر حسب تنشها است. يا در حقيقت معادله سازگاري قطبي براي حالت تنش صفحه اي براي ماده اي با مشخصات FGM بر حسب تنش است. بمنظور حل اين معادله ميتوان آنرا بر حسب توابع تنش نوشت. مي دانيم كه تنش بر حسب توابع تنش در مختصات قطبي بصورت زير خواهند بود:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \qquad (۱-۶)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \qquad (۲-۶)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r.\partial \theta} \qquad (۳-۶)$$

روابط فوق در معادله سازگاري تنش قرار داده و بعد از مشتق گيريهاي لازم، ساده سازي و مرتب كردن به معادله زير خواهيم رسيد (كليه عملياتهاي مشتق گيري، ساده سازي و مرتب كردن عبارات در فايل MathCAD مربوط به اين پروژه موجود است):

$$\begin{aligned} &Q1(r).\frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + Q2(r).\frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta^4} + Q3(r).\frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + Q4(r).\frac{\partial^4 \phi}{\partial r^2.\partial \theta^2} + Q5(r).\frac{\partial^3 \phi}{\partial r.\partial \theta^2} + \\ &Q6(r).\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + Q7(r).\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + Q8(r).\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \qquad (۷)$$

اين يك معادله ديفرانسيل مرتبه ۴ خطي همگن دو متغيري با ضرايب متغير است. ضرايب Q(r) براي هر يك از عبارات به شرح ذيل است:

$$Q1(r) = 1 \qquad (۱-۸)$$

$$Q2(r) = \frac{1}{r^4} \qquad (۲-۸)$$

$$Q3(r) = \frac{2}{r} - 2\frac{et}{E(r)} \qquad (۳-۸)$$

$$Q4(r) = \frac{2}{r^2} \qquad (۴-۸)$$

$$Q5(r) = -\frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{et}{E(r)} \qquad (۵-۸)$$

$$Q6(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\nu - 2}{r}\frac{et}{E(r)} + 2\frac{et^2}{E(r)^2} \qquad (۶-۸)$$

$$Q7(r) = \frac{4}{r^4} + \frac{3}{r^3}\frac{et}{E(r)} - \frac{2\nu}{r^2}\frac{et^2}{E(r)^2} \qquad (۷-۸)$$

$$Q8(r) = \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{et}{E(r)} - \frac{2\nu}{r}\frac{et^2}{E(r)^2} \qquad (۸-۸)$$

همانطور كه ملاحظه ميشود ضرايب فوق اكثرا از دو بخش تشكيل شده است. يك بخش وابسته به et و بخش ديگر مستقل از آن است. يعني اگر در اين ضرايب et=0 قرار داده شود يعني تغييرات مواد در راستاي شعاع نداشته باشيم، معادله تيرخميده با مواد همگن بدست مي آيد. اثبات مطلب فوق را ميتوان با بسط معادله بايهارمونيك در مختصات قطبي براحتي نتيجه گيري كرد. طبق موارد مشابه در مرجع [۲] معادله ديفرانسيل فوق داراي شرايط مرزي ذيل است:

۱- تنش شعاعي σ_r در مرز r=a و r=b برابر صفر است.

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\phi(r_a,\theta)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2}{d\theta^2}\phi(r_a,\theta)=0$$

(۹-۱)

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\phi(r_b,\theta)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2}{d\theta^2}\phi(r_b,\theta)=0$$

(۹-۲)

۲- تنش برشي $\tau_{r\theta}$ در مرز r=a و r=b برابر صفر است.

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\phi(r_a,\theta)-\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\frac{d}{d\theta}\phi(r_a,\theta)=0$$

(۹-۳)

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\phi(r_b,\theta)-\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\frac{d}{d\theta}\phi(r_b,\theta)=0$$

(۹-۴)

۳- مجموع تنش برشي در $\theta=0$ برابر بار اعمال شده يعني P است.

$$\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\phi(r,0)-\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\frac{d}{d\theta}\phi(r,0)\,dr=P$$

(۹-۵)

۴- مجموع تنش عمودي در $\theta=0$ برابر بار اعمال شده يعني F است.

$$\int_{r_a}^{r_b}\frac{d^2}{dr^2}\phi(r,0)\,dr=F$$

(۹-۶)

۵- مجموع ممان تنش عمودي در $\theta=0$ برابر ممان خمشي اعمال شده يعني M است.

$$\int_{r_a}^{r_b}r\cdot\frac{d^2}{dr^2}\phi(r,0)\,dr=M$$

(۹-۷)

البته احتمال دارد كه در بين شرايط مرزي فوق به شرطهاي تكراري برسيم كه طبعا حذف خواهند شد. بعد از حل تنش، براي حل جابجايي از شرايط مرزي جابجايي نيز بايد استفاده كرد. شرايط فوق شبيه شرايط ذكر شده در مرجع [۲] خوهد بود. شرايط مرزي جابجايي در $\theta=90$ اعمال ميشوند. بدين صورت كه جابجائيهاي شعاعي و زاويه اي و همچنين شيب خط قيد تير در اين ناحيه برابر صفر در نظر گرفته ميشود. همچنين با توجه به صفر شدن تنشهاي برشي در مرزهاي r=a و r=b ، كرنشهاي برشي نيز در اين مرز برابر صفر خواهد بود. بايد توجه كرد كه در صورت متغير بودن مرز تير خميده، اعمال شرايط مرزي تنش در مرزها بسيار پيچيده خواهد بود. به فصل (۳) اين سري از گزارشها مربوط به تير خميده با مرز متغير رجوع كنيد.

۲- بررسي روشهاي حل معادله ديفرانسيل

حل اين معادله ديفرانسيل با شرايط مرزي فوق بصورت تحليلي بسيار مشكل و خارج از حد اين متن ميباشد. يكي از روشهاي حل آن شكستن آن به معادلات ديفرانسيل تك متغيري است، كه در اينصورت احتمالا بتوان با روشهاي معروف معادلات ديفرانسيل يا سريهاي فوريه به نتيجه رسيد. در مرجع [۲] براي گريز از پيچيدگي روابط و همچنين با استفاده از اصل رويهم گذاري، سه حالت بارگذاري وارده بر انتهاي تير، بصورت تك تك اعمال و در هر قسمت تمامي روابط تنشها و جابجائيها استخراج شده است. كه ميتوان بعد از آن با مونتاژ روابط فوق، رابطه كلي بارگذاري انتهايي تير را بدست آورد.

همانطور كه در آن مرجع مشخص شده است با توجه به فيزيك مسئله، ممان خمشي اعمال شده بر تير متناسب با زاويه θ و البته با $\sin\theta$ و $Cos\theta$ خواهد بود. در ادامه بمنظور حل از توابعي با نام f(r) براي جداسازي متغيرها استفاده شد كه هر كدام داراي ضرايبي از سينوس يا كسينوس بودند. در مبحث فعلي نيز ميتوان با اعمال يك تابع تنش تركيبي از عبارتهاي فوق معادله ديفرانسيل (۷) را به چند معادله ديفرانسيل با ضرايب متغير يك بعدي تبديل كرد. البته اين فرض به معني تقريب زدن رفتار بصورت يك تير همگن نيست، بلكه كمك گرفتن از روابط آن براي رسيدن به جواب تير خميده FGM با شرايط مرزي مخصوص به آن است. پس:

$$\phi = f_1(r) + f_2(r)\sin(\theta) + f_3(r)\cos(\theta) \quad (۱۰)$$

كه توابع f(r) ها فقط تابعي از r بوده و فعلا نامشخص ميباشند. اگر اين ϕ را در معادله ديفرانسيل (۷) قرار دهيم بصورت كلي داراي عبارتهاي زير خواهد بود:

$$\begin{aligned} &F1\left(\partial^4/\partial r^4\, f_1(r), \partial^3/\partial r^3\, f_1(r), ..., f_1(r), r\right) + \\ &F2\left(\partial^4/\partial r^4\, f_2(r), \partial^3/\partial r^3\, f_2(r), ..., f_2(r), r\right)\sin(\theta) + \\ &F3\left(\partial^4/\partial r^4\, f_3(r), \partial^3/\partial r^3\, f_3(r), ..., f_3(r), r\right)\cos(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با توجه با اينكه معادله ديفرانسيل فوق در تمام دامنه از r و θ صدق ميكند بنابراين هر كدام از اينها جملات بايد تك تك برابر صفر باشند. يعني:

$$F1\left(\partial^4/\partial r^4\, f_1(r), \partial^3/\partial r^3\, f_1(r), ..., f_1(r), r\right) = 0 \quad (۱-۱۲)$$

$$F2\left(\partial^4/\partial r^4\, f_2(r), \partial^3/\partial r^3\, f_2(r), ..., f_2(r), r\right) = 0 \quad (۲-۱۲)$$

$$F3\left(\partial^4/\partial r^4\, f_3(r), \partial^3/\partial r^3\, f_3(r), ..., f_3(r), r\right) = 0 \quad (۳-۱۲)$$

كه بسط داده شده آنها بشرح ذيل است:

$$Q1(r)\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f1(r)\right)+Q3(r)\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f1(r)\right)+Q6(r)\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f1(r)\right)+Q8(r)\cdot\frac{d}{dr}f1(r)\ \ \mathbf{=0}$$ (۱-۱۳)

$$Q1(r)\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f2(r)\right)+Q3(r)\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f2(r)\right)+(Q6(r)-Q4(r))\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f2(r)\right)+(Q8(r)-Q5(r))\cdot\frac{d}{dr}f2(r)+(Q2(r)-Q7(r))\cdot f2(r)\ \ \mathbf{=0}$$ (۲-۱۳)

$$Q1(r)\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f3(r)\right)+Q3(r)\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f3(r)\right)+(Q6(r)-Q4(r))\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f3(r)\right)+(Q8(r)-Q5(r))\cdot\frac{d}{dr}f3(r)+(Q2(r)-Q7(r))\cdot f3(r)\ \ \mathbf{=0}$$ (۳-۱۳)

که ضرايب Q(r) ها، همان ضرايب قبلي بوده و ضرايب جديد تركيبي بصورت زير است:

$$Q64(r)=Q6(r)-Q4(r)$$ (۱-۱۴)

$$Q85(r)=Q8(r)-Q5(r)$$ (۲-۱۴)

$$Q27(r)=Q2(r)-Q7(r)$$ (۳-۱۴)

با جايگذاري ϕ در شرايط مرزي (۹)، شرايط مرزي جديد بصورت ذيل خواهند بود:

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dr}f_1(a)=0$$ (۱-۱۵)

$$\frac{1}{b}\frac{d}{dr}f_1(b)=0$$ (۲-۱۵)

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dr}f_2(a)-\frac{1}{a^2}f_2(a)=0$$ (۳-۱۵)

$$\frac{1}{b}\frac{d}{dr}f_1(b)-\frac{1}{b^2}f_2(b)=0$$ (۴-۱۵)

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dr}f_3(a)-\frac{1}{a^2}f_3(a)=0$$ (۵-۱۵)

$$\frac{1}{b}\frac{d}{dr}f_3(b)-\frac{1}{b^2}f_3(b)=0$$ (۶-۱۵)

$$\int_a^b\left[\frac{1}{r^2}f_2(r)-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}f_2(r)\right]dr=P$$ (۷-۱۵)

$$\int_a^b\left[\frac{d^2}{dr^2}f_1(r)+\frac{d^2}{dr^2}f_3(r)\right]dr=F$$ (۸-۱۵)

$$\int_a^b\left[\frac{d^2}{dr^2}f_1(r)+\frac{d^2}{dr^2}f_3(r)\right].r.dr=M$$ (۹-۱۵)

جزئيات مربوط به شكستن شرايط مرزي و ... در فايل MathCAD (پيوست) موجود است.

شرط مرزي $\tau_{r\theta}(a,\theta)=\tau_{r\theta}(a,\theta)=0$ تكراري بوده و از ذكر دوبارة آن خودداري شده است. همانطور كه ملاحظه ميشود شرايط مرزي به هم كوپل شده و بنابراين پيچيدگي موجود در معادله ديفرانسيل (۷) به اين شرايط مرزي منتقل شده است. البته در صورت حل معادلات فوق بصورت تك تك، شرايط مرزي (۱۵) ، از حالت كوپلي خارج شده و بنابراين حل آنها به صورت عددي يا تحليلي-تقريبي ممكن خواهد بود. لازم بذكر استكه براي حالت نرمال (نيروي عمودي) در مرجع [۲] حالت خاصي از f(r) در نظر گرفته شده كه شايد براي حالت تير FGM هم صدق بكند.

در مرجع [۲] اشاره شد كه معادله ديفرانسيل براي حالت همگن ، همان معادله بايهارمونيك ميباشد كه حل عمومي آن با استفاده از توابع f(r) بدست آمده از مراجع مختلف بررسي و در نهايت ضرايب نامشخص آن از شرايط مرزي بدست آمد. با توجه به نوع ضرايب معادله ديفرانسيل تير خميدة FGM ، مشخص نيست كه f(r)ها براي اين معادله، يعني حل عمومي آن به چه شكلي است. پس نميتوان از تركيب استفاده شده براي تير خميده همگن، براي تيرخميده ناهمگن استفاده كرد.

در حال حاضر سه معادله ديفرانسيل مجزا (۱۳) براي هر كدام ار بارگذاريها با ضرايب (۱۴) و شرايط مرزي (۱۵) موجود است. حل آنها بصورت تقريبي- تحليلي از روشهاي FE يا FD به اجراي روشهاي عددي مشتق گيري، انتگرال گيري، حل دستگاه معادلات و شرايط مرزي بر مرزهاي منحني نياز دارد كه از حوصله اين مقاله خارج است.

۳- مراجع

۱- "جزوه درسي الاستيسيته "، دكتر غلامحسين رحيمي.

۲- "تيـر خميده يك سـرگيردار تحت بـار انتهـايي محوري، برشي و ممـان خمشي با هندسـه ثابت و مـواد همگن" ، بهروز حسين پور بناب.

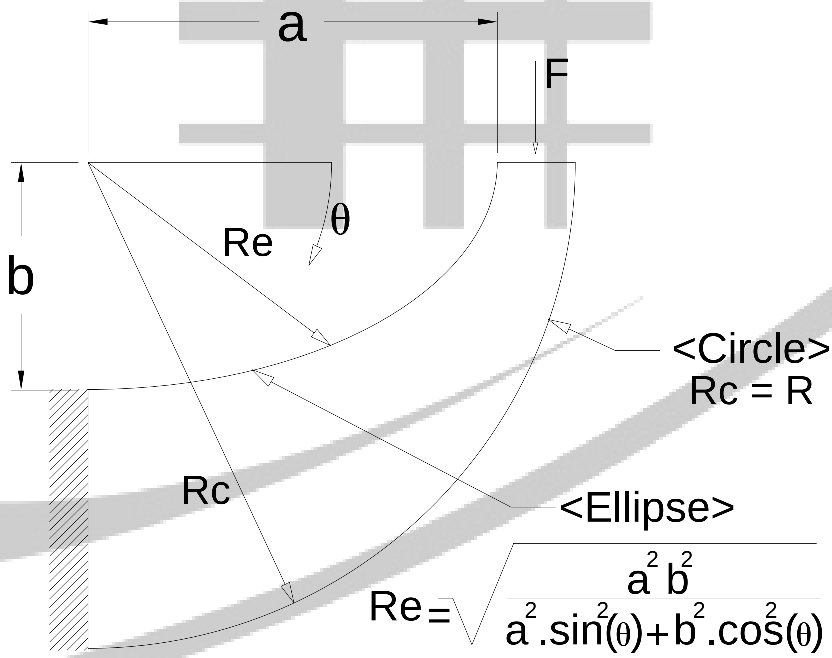
۳- " مقاومت پيشرفته و الاستيسيته كاربردي " ، تاليف:دكتر محمود شاكري.

4- "Theory of Elasticity", By: S. Timoshenko and J.N. Goodier.

5- "Numerical Methods for Engineers and Scientists", By: J.D. Hoffman.

پروژه (۳)

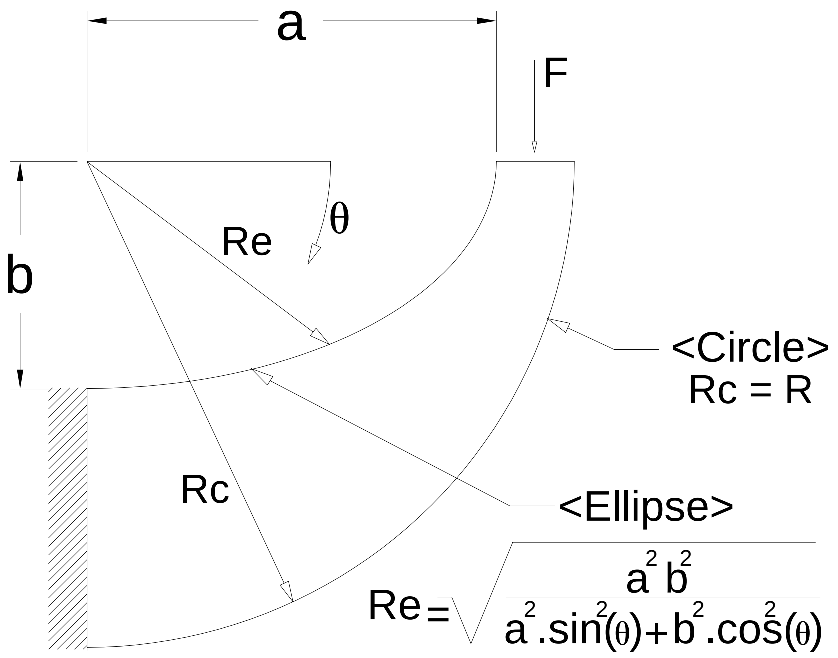
تیر خمیده یک سرگیردار
تحت بارهای انتهایی محوری
با هندسه متغیر و مواد همگن



فهرست عناوین

تیر خمیده یک سرگیردار تحت بارهای انتهایی محوری با هندسه متغیر و مواد همگن

بهروز حسين پور بناب
گروه هوافضا - دانشكده فني مهندسي
دانشگاه تربيت مدرس
b_hosseinpour2003@Yahoo.com



$$Re = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2.\sin^2(\theta)+b^2.\cos^2(\theta)}}$$

يك تير يك سرگيردار ساخته شده از مواد همگن كه داراي هندسه متغيري مي باشد، تحت بارگذاري انتهايي قـرار گرفتـه است. با توجه به شكل مسئله بهتر استكه از مختصات قطبي استفاده شود. اين تير خميده مركب از سطح بيروني دايره اي و سـطح داخلي به رابطه بيضي شكل استكه در شكل فوق ارائه شده اند. تحليل كلي آن با جابجايي اين مرزها هيچ تغييري نمـي كنـد. ايـن مرزها مي توانست از بصورت سهمي يا هر شكل ديگري با رابطه قابل توصيفي باشد. آنچه در اين ميان تغيير خواهد كـرد چگـونگي اعمال شرايط مرزي در مرزهاي غير دايره اي است، كه با تير خميده با هندسه ثابت فرق مي كند.

۱- تحليل تنش

۱-۱ بارگذاري نيروي محوري **F**

لازم بذكر استكه اصول كلي تحليل اين تير نيز شبيه يك تير خميده با هندسه ثابت ميباشد. آنچه در اين ميان باعث اختلاف در حل و ناگزير ارائه اين متن شده، اختلاف دراعمال شرايط مرزي است. همچنين ميتوان توابع تنش در نظر گرفته شده براي چگونگي توزيع تنش و در نهايت براي جابجايي را با سعي و خطاي زياد تغيير داده و بهترين آنها را در نظر گرفت. همانطور كه در تحليل تير خميده با هندسه ثابت ملاحظه گرديد، معيار مقايسه، تحليلهاي .F.E ميباشد. در اين متن فقط تحليل بارگذاري نيروي محوري ارائه شده است. با توجه به اختلاف ارائه شده در اين مبحث با تير خميده هندسه ثابت، تحليل هاي بارگذاري نيروي برشي و ممان خمشي مشابه تير هندسه ثابت و تنها با اختلاف شرايط مرزي مذكور خواهد بود.

يك نيروي محوري بصورت عمود بر سطح آزاد تير خميده وارد ميشود. فرض ميشود كه اين مسئله داراي حل كامل بوده و بنابراين تنشهاي بدست آمده بايد رابطه سازگاري (۱) را در غياب نيروهاي حجمي براي تمامي نقاط آن ارضا كنند.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right)=0 \qquad (۱)$$

تنشهايي كه اين معادله را ارضا ميكنند داراي شكل (۲) مي باشند:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \qquad (۲-۱)$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \qquad (۲-۲)$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r.\partial\theta} \qquad (۲-۳)$$

مي دانيم كه ممان خمشي اعمال شده در اين حالت در هر مقطع متناسب با زاويه θ و البته با $Cos\theta$ خواهد بود. در تئوري مقدماتي تيرها نيز پيشنهاد ميشود كه σ_θ متناسب با ممان خمشي اعمال شود. بنابراين براي حل فرض ميشود كه ϕ تابعي از $Cos\theta$ است. يعني :

$$\phi(r,\theta)=f_1(r)(\cos(\theta)-1)+g1.r^2.\cos(\theta) \qquad (۳)$$

كه $f1(r)$ تابعي از r و $g1$ يك ثابت است. آنرا در سري روابط (۲) قرار ميدهيم:

$$\sigma r=\left[\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{d}{dr}f1(r)+2\cdot g1\cdot r\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\left(-f1(r)-g1\cdot r^2\right)\right]\cdot\cos(\theta)-\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}f1(r) \qquad (۴-۱)$$

$$\sigma\theta=\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}f1(r)\cdot(\cos(\theta)-1)+2\cdot g1\cdot\cos(\theta) \qquad (۴-۲)$$

$$\tau r\theta = \left(g1 - \frac{1}{r^2}\cdot f1(r) + \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}f1(r) \right)\cdot\sin(\theta)$$ (۳-۴)

عبارت f1(r) كه بتواند در روابط تنش صدق كرده و معادله بايهارمونيك را براي حل عمومي ارضا كند داراي شكل (۵) خواهد بود:

$$f1(r) = A1.r^3 + \frac{B1}{r} + C1.r + D1.r.Lnr$$ (۵)

كه ضرايب A1...D1 ثابت بوده و مقادير آنها با حل خصوصي معادله بايهارمونيك، از شرايط مرزي محاسبه ميشوند. اين شكل از تابع تنش ميتواند تركيبهاي مختلفي از r داشته باشد. آنچه در رابطه (۵) ملاحظه گرديد مربوط به مرجع [۱] ميباشد. در مرجع [۳] رابطه اي به شكل زير ارائه شده است:

$$f1(r) = A1.Lnr + B1.r^2 Lnr + C1.r^2 + D1$$ (۶)

در مرجع [۴] نيز رابطه اي مشابه بدون ثابت D1 براي حالت بارگذاري ممان خمشي براي تير خميده با هندسه ثابت ارائه شده است. البته در اين مرجع اين رابطه مستقيما ارائه نشده است، بلكه حل معكوس تنشهاي استخراج شده نشانگر اين مطلب است. همانطور كه ملاحظه مي شود تغييرات زيادي در عبارت داده شده است. با توجه اينكه در هر سه مرجع از طريق محاسبات، پاسخ صحيح مسئله ارائه شده است (غير از اشتباهاتي كه در مرجع [۴] در چاپ يا ارائه مطلب انجام شده است) و تحليل ارائه شده در مرجع [۲] براي تير خميده هندسه ثابت كه با رابطه مرجع [۱] انجام و صحت آنها با روش .F.E مورد تاييد قرار گرفته است، بنابراين به نظر ميرسد كه تركيبهاي مختلفي از متغير r را ميتوان ارائه داد كه بتواند به پاسخ مناسبي برسد. تحليلهاي انجام شده براي هندسه متغير با θ نشانگر اينست كه، بدليل داشتن شرايط مرزي بيشتر نسبت به هندسه ثابت بايد عبارت f1(r) داراي جمله هاي مختلفي از r باشد. بنابراين تحليل با دو عبارت (۵) و (۷) انجام گرفته و روش نتيجه گيري از هر كدام نيز ارائه شده است. لازم بذكر استكه رابطه (۶) بعنوان رابطه استاندارد براي ارضا معادله ديفرانسيل بايهارمونيك ارائه شده است.

$$f1(r) = A1.Lnr + B1.r^2 Lnr + C1.r^2 + D1.r.Lnr + E1$$ (۷)

با قرار دادن عبارت (۵) در روابط (۴) و بعد از ساده سازي خواهيم داشت:

$$\sigma r = \left(2\cdot A1\cdot r + g1 + \frac{D1}{r} - 2\cdot\frac{B1}{r^3} \right)\cdot\cos(\theta) - \left[3\cdot A1\cdot r - \frac{B1}{r^3} + \frac{C1}{r} + \frac{(1+\ln(r))}{r}\cdot D1 \right]$$ (۱-۸)

$$\sigma\theta = \left(6\cdot A1\cdot r + 2\cdot\frac{B1}{r^3} + \frac{D1}{r} \right)\cdot(\cos(\theta) - 1) + 2\cdot g1\cdot\cos(\theta)$$ (۲-۸)

$$\tau r\theta = \left(2\cdot r\cdot A1 + \frac{-2}{r^3}\cdot B1 + \frac{1}{r}\cdot D1 + g1 \right)\cdot\sin(\theta)$$ (۳-۸)

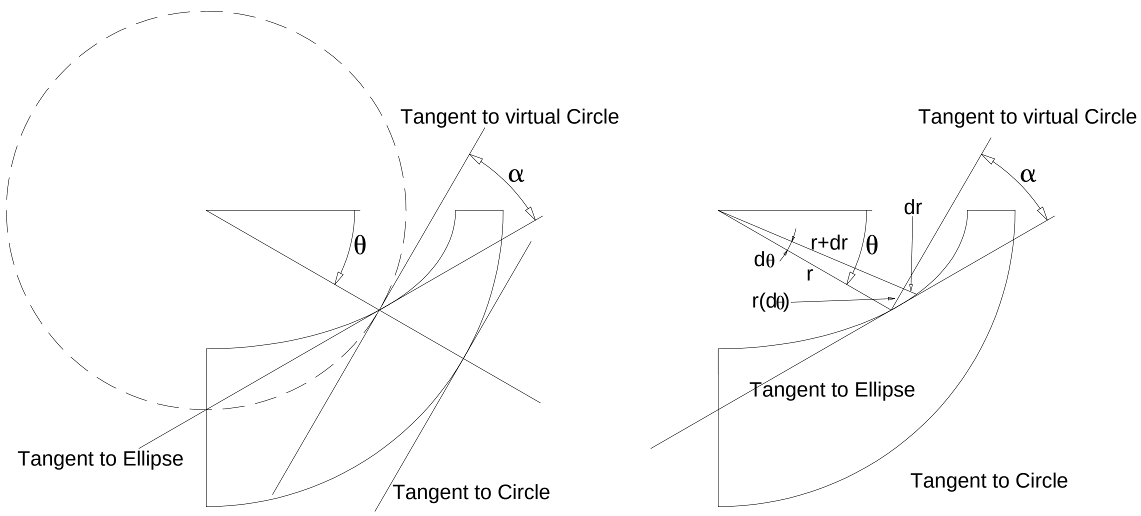
شرايط مرزي براي مسئله فوق بدين صورت استكه تنشهاي شعاعي σ_r و تنشـهاي برشـي $\tau_{r\theta}$ در $r = Rc$ و $r = \mathrm{Re}$ برابر صفر ميباشد. همچنين مجموع تنشهاي نرمال (محوري) σ_θ در سر آزاد تير خميـده $\theta = 0$ برابـر نيـروي اعمـالي يعنـي F خواهد بود.

بخش اول شرايط مرزي در مرز $r = Rc$ را در رابطه (۸-۱) قرار داده و ساده مي كنيم:

$$\left(2\cdot A1\cdot Rc - 2\cdot\frac{B1}{Rc^3} + \frac{D1}{Rc} + g1\right) = 0 \qquad (۹-۱)$$

$$\left[3\cdot A1\cdot Rc - \frac{B1}{Rc^3} + \frac{C1}{Rc} + \frac{(1+\ln(Rc))}{Rc}\cdot D1\right] = 0 \qquad (۹-۲)$$

در مورد مرز بيضي يا مرز داخلي بدين صورت استكه تنشهاي نرمال بر مرز بيضي صفر ميباشد. يعني جهت آن همان جهت شعاعي نبوده، بلكه با تغيير زاويه اين جهت دائما در حال تغيير ميباشد. براي بدست آوردن اين تنشها دو مسئله بايد در نظر گرفته شود. اولي بدست آوردن رابطه نرمال بر منحني بيضي و دومي تغيير جهت تنشهاي نرمال معمول به جهت عمود بر بيضي.



شكل -۱ : چگونگي استخراج نرمال برمنحني بيضي و اختلاف زاويه با نرمال دايره

رابطه بيضي بصورت (۱۰) ميباشد:

$$\mathrm{Re} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2.\sin(\theta)^2 + b^2.\cos(\theta)^2}} \qquad (۱۰)$$

از اين رابطه نسبت به θ مشتق ميگيريم:

$$\frac{d(\mathrm{Re})}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{2a^2b^2(a^2-b^2).\sin(\theta).\cos(\theta)}{-2.\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2.\sin(\theta)^2+b^2.\cos(\theta)^2}}.\left(a^2.\sin(\theta)^2+b^2.\cos(\theta)^2\right)^2} \qquad (۱۱)$$

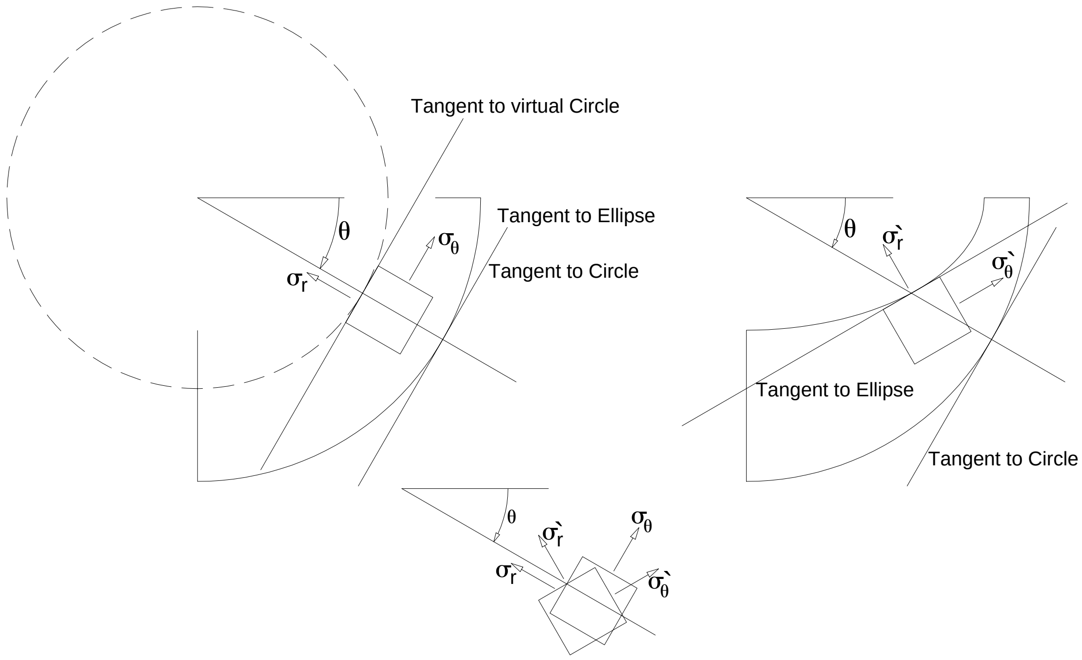
با توجه شكل فوق ملاحظه ميشود كه زاويه α از رابطه (۱۲) بدست مي آيد. يعني:

$$\alpha = Arc\tan\left[\frac{dr}{r.d\theta}\right] \qquad (۱۲)$$

$$\alpha = Arc\tan\left[\frac{2a^2b^2(a^2-b^2).\sin(\theta).\cos(\theta)}{-2.\dfrac{a^2b^2}{a^2.\sin(\theta)^2+b^2.\cos(\theta)^2}.\left(a^2.\sin(\theta)^2+b^2.\cos(\theta)^2\right)^2}\right] \qquad (۱۳)$$

حالا كه زاويه صحيح نرمال بر منحني بيضي بدست آمد، تنشهاي نرمال بر اين منحني با زاويـه چـرخش α بصـورت زيـر حاصل ميشود:

$$\sigma'_r = \frac{\sigma_\theta+\sigma_r}{2} - \frac{\sigma_\theta-\sigma_r}{2}.\cos(2\alpha) - \tau_{r\theta}\sin(2\alpha) \qquad (۱۴)$$



شكل -۲ : چگونگي تبديل تنش براي دو مختصات عمود بر دايره و بيضي

روابط (۸-۱)، (۸-۲) و (۸-۳) را در رابطه (۱۴) قرار داده كه با توجه به شكل-۲، مقدار σ'_r بصورت رابطه (۱۵) در مي آيد:

$$\sigma'_r =$$
$$\left[2\cdot(2-\cos(2\cdot\alpha))\cdot r\cdot A1 - B1\cdot\frac{2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}{r^3} + \left(\frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2}\right)\cdot g1 + \frac{D1}{r}\right]\cdot\cos(\theta)\ ...$$
$$+\left[\frac{3}{2}\cdot(\cos(2\cdot\alpha)-3)\cdot r\cdot A1 + \frac{(3\cdot\cos(2\cdot\alpha)-1)}{2\cdot r^3}\cdot B1 - \frac{(\cos(2\cdot\alpha)+1)}{2\cdot r}\cdot C1 - \left[\frac{(\cos(2\cdot\alpha)+1)}{2\cdot r}\cdot\ln(r) + \frac{1}{r}\right]\cdot D1\right]\ ..$$
$$+\left(2\cdot A1\cdot r - \frac{2}{r^3}\cdot B1 + \frac{1}{r}\cdot D1 + g1\right)\cdot -\sin(\theta)\cdot\sin(2\cdot\alpha)$$

(۱۵)

حال بايد شرايط مرزي، دراين مرز قرار داده شود. همانطور كه ملاحظه شد رابطه منحني بيضي و همين طور اختلاف زاويه α بسيار پيچيده بوده و بنابراين از ابتدا بايد اين مسئله در نظر گرفته شود. در رابطه (۱۵) ملاحظه ميشود كه اين عبـارت از سـه جمله مشخص و مجزا تشكيل شده، كه بطور خلاصه ميتوان نوشت:

$$\sigma_r' = X1(\theta).\cos(\theta) + X2(\theta) + X3(\theta).\sin(\theta) \quad (۱۶)$$

بنابراين صفر شدن اين رابطه در $r=Re$ به اين معني است كه با توجه به استقلال خطي $Sin\theta$ ، $Cos\theta$ و 1 هر كدام از جملات فوق بايد برابر صفر قرار بگيرند. پس به سه معادله ديگر براي دستگاه معادلات ميرسيم. امـا بـدليل اينكـه دو معادلـه قـبلا استخراج شده و يكي از معادلات هم در ادامه بدست مي آيد، بنابراين با توجه به داشـتن ۵ مجهـول مجبـوريم كـه از يكـي از سـه معادله فوق صرف نظر كنيم. اين قرعه را به نام جمله اي ميزنيم كه شامل عبارت $Sin\theta$ ، $Cos\theta$ نيست. پس:

$$\left[2\cdot(2-\cos(2\cdot\alpha))\cdot Re\cdot A1 - B1\cdot\frac{2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}{r^3} + \left(\frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2}\right)\cdot g1 + \frac{D1}{Re}\right] = 0 \quad (۳\text{-}۹)$$

$$\left(2\cdot A1\cdot Re - \frac{2}{Re^3}\cdot B1 + \frac{1}{Re}\cdot D1 + g1\right) = 0 \quad (۴\text{-}۹)$$

شرط پنجم مجموع تنشهاي زاويه اي در انتهاي آزاد تير خميده است. يعني:

$$t\cdot\int_{Re}^{Rc}\left(6\cdot A1\cdot r + 2\cdot\frac{B1}{r^3} + \frac{D1}{r}\right)\cdot(\cos(\theta)-1) + 2\cdot g1\cdot\cos(\theta)\,dr = F$$

$$t\cdot\int_a^b 2\cdot g1\,dr = F \qquad \textbf{or} \qquad 2\cdot g1\cdot(b-a) = F/t \quad (۵\text{-}۹)$$

جايگذاري شرايط مرزي منتهي به يك دستگاه ۵ معادله ۵ مجهولي ميشود كه بعد از حـل مقـاير A1 ، B1 ، C1 ، D1 و g1 بدست مي آيند كه هر كدام از آنها تابعي از θ است.

$$\begin{bmatrix} 2\cdot Rc & \frac{-2}{Rc^3} & 0 & \frac{1}{Rc} & 1 \\ 3\cdot Rc & \frac{-1}{Rc^3} & \frac{1}{Rc} & \frac{(1+\ln(Rc))}{Rc} & 0 \\ 2\cdot(2-\cos(2\cdot\alpha))\cdot Re & -\frac{2\cdot\cos(2\cdot\alpha)}{Re^3} & 0 & \frac{1}{Re} & \frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2} \\ 2\cdot Re & \frac{-2}{Re^3} & 0 & \frac{1}{Re} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot(Rc-a) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A1 \\ B1 \\ C1 \\ D1 \\ g1 \end{pmatrix} \quad (۱۷)$$

بدليل بزرگ و پيچيده بودن روابط از ذكر آنها در اينجا خودداري ميشود. براي مشاهده مي توانيد به پيوست رجوع كنيد. با جايگذاري پارامترهاي مجهول، تنشهاي شعاعي، زوايه اي و برشي در هر نقطه از تير بدست مي آيد.

در مبحث فوق ملاحظه شد كه رابطه (۵) براي استفاده در تير خميده با هندسه متغير جوابگو نبوده و بنابراين از عبارتي با جملات زيادتر كه بخش اصلي آنرا رابطه (۶) تشكيل ميدهد، استفاده ميكنيم. در ادامه رابطه (۷) براي اين منظور بكار برده شده است. پس f1(r) بصورت زير است:

$$f1(r) = A1.Lnr + B1.r^2 Lnr + C1.r^2 + D1.r.Lnr + E1 \qquad (۷)$$

با قرار دادن عبارت (۷) در روابط (۴) و بعد از ساده سازي خواهيم داشت:

$$\sigma r = \left[\frac{1-\ln(r)}{r^2}\cdot A1 + (\ln(r)+1)\cdot B1 + C1 + \frac{1}{r}\cdot D1 - \frac{1}{r^2}\cdot E1 + g1\right]\cdot\cos(\theta) - \frac{1}{r^2}\cdot A1 - (2\cdot\ln(r)+1)\cdot B1 - 2\cdot C1 + \frac{(-\ln(r)-1)}{r}\cdot D1 \qquad (۱\text{-}۱۸)$$

$$\sigma\theta = \left[\frac{-A1}{r^2} + (2\cdot\ln(r)+3)\cdot B1 + 2\cdot C1 + \frac{D1}{r}\right]\cdot(\cos(\theta)-1) + 2\cdot g1\cdot\cos(\theta) \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

$$\tau r\theta = \left[\frac{1-\ln(r)}{r^2}\cdot A1 + (\ln(r)+1)\cdot B1 + C1 + \frac{1}{r}\cdot D1 - \frac{1}{r^2}\cdot E1 + g1\right]\cdot\sin(\theta) \qquad (۳\text{-}۱۸)$$

شرايط مرزي براي مرز دايره اي $r = Rc$ شبيه قسمت قبلي بوده و بنابراين در رابطه (۱۸-۱) خواهيم داشت:

$$\left[\frac{1-\ln(Rc)}{Rc^2}\cdot A1 + (\ln(Rc)+1)\cdot B1 + C1 + \frac{1}{Rc}\cdot D1 - \frac{1}{Rc^2}\cdot E1 + g1\right] = 0 \qquad (۱\text{-}۱۹)$$

$$\frac{-1}{Rc^2}\cdot A1 - (2\cdot\ln(Rc)+1)\cdot B1 - 2\cdot C1 - \frac{(\ln(Rc)+1)}{Rc}\cdot D1 = 0 \qquad (۲\text{-}۱۹)$$

در مورد مرز بيضي، با توجه به توضيحات ارائه شده در مبحث قبل، روابط (۱۸-۱)، (۱۸-۲) و (۱۸-۳) را در رابطه (۱۴) قرار داده ومقدار σ'_r را بصورت رابطه (۲۰) بدست مي آوريم:

$$\begin{aligned}\sigma'_r = &\left[\frac{(2-\ln(r))\cdot\cos(2\cdot\alpha)+\ln(r)}{2\cdot r^2}\cdot A1 + \left[\frac{3}{2}\cdot\ln(r) + 2 - \left(\frac{2+\ln(r)}{2}\right)\cdot\cos(2\cdot\alpha)\right]\cdot B1 \ldots \right.\\ &\left. + \left[\frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2}\cdot C1 - \frac{(1+\cos(2\cdot\alpha))}{(2\cdot r^2)}\cdot E1 + \frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2}\cdot g1 + \frac{1}{r}\cdot D1\right]\right]\cdot\cos(\theta) \ldots\\ &+\left[\frac{(-1+\ln(r))}{r^2}\cdot A1 - (\ln(r)+1)\cdot B1 - C1 - \frac{1}{r}\cdot D1 + \frac{1}{r^2}\cdot E1 - g1\right]\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(2\cdot\alpha) \ldots\\ &+\frac{-1}{r^2}\cdot A1\cdot\cos(2\cdot\alpha) + (-2\cdot\ln(r) - 2 + \cos(2\cdot\alpha))\cdot B1 - 2\cdot C1 + \frac{2+(1+\cos(2\cdot\alpha))\cdot\ln(r)}{-2\cdot r}\cdot D1\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

كه شبيه رابطه (۱۶) بوده و با توجه به توضيحات ارائه شده قبلي، بايد هر سه عبارت مستقل برابر صفر قرار بگيرند. يعني:

$$\left[\frac{(2-\ln(Re))\cdot\cos(2\cdot\alpha)+\ln(Re)}{2\cdot Re^2}\cdot A1+\left[\frac{3}{2}\cdot\ln(Re)+2-\left(\frac{2+\ln(Re)}{2}\right)\cdot\cos(2\cdot\alpha)\right]\cdot B1\ldots \atop +\left[\frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2}\cdot C1-\frac{(1+\cos(2\cdot\alpha))}{(2\cdot Re^2)}\cdot E1+\frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2}\cdot g1+\frac{1}{Re}\cdot D1\right]\right] = 0$$

(۳-۱۹)

$$\left[\frac{(-1+\ln(Re))}{Re^2}\cdot A1-(\ln(Re)+1)\cdot B1-C1-\frac{1}{Re}\cdot D1+\frac{1}{Re^2}\cdot E1-g1\right] = 0$$

(۴-۱۹)

$$\frac{-1}{Re^2}\cdot A1\cdot\cos(2\cdot\alpha)+(-2\cdot\ln(Re)-2+\cos(2\cdot\alpha))\cdot B1-2\cdot C1+\frac{2+(1+\cos(2\cdot\alpha))\cdot\ln(Re)}{-2\cdot Re}\cdot D1 = 0$$

(۵-۱۹)

شرط ششم مجموع تنشهاي زاويه اي در انتهاي آزاد تير خميده است. يعني:

$$t\cdot\int_{Re}^{Rc}\left[\frac{-A1}{r^2}+(2\cdot\ln(r)+3)\cdot B1+2\cdot C1+\frac{D1}{r}\right]\cdot(\cos(\theta)-1)+2\cdot g1\cdot\cos(\theta)\,dr = F$$

$$t\cdot\int_{Re}^{Rc}2\cdot g1\,dr = F \qquad \textit{or} \qquad 2\cdot(Rc-a)\cdot g1 = F/t$$

(۶-۱۹)

جايگذاري شرايط مرزي منتهي به يك دستگاه ۶ معادله ۶ مجهولي (۱۹) ميشود كه بعـد از حـل مقـاير A1 ، B1 ، C1 ، D1 ، E1 و g1 بدست مي آيند كه هر كدام از آنها تابعي از θ است. دستگاه معادله حاصل، به شكل زير ميباشد:

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\ln(Rc)}{Rc^2} & (\ln(Rc)+1) & 1 & \frac{1}{Rc} & \frac{-1}{Rc^2} & 1 \\ \frac{-1}{Rc^2} & -(2\cdot\ln(Rc)+1) & -2 & \frac{(\ln(Rc)+1)}{-Rc} & 0 & 0 \\ \frac{(2-\ln(Re))\cdot\cos(2\cdot\alpha)+\ln(Re)}{2\cdot Re^2} & \left[\frac{3}{2}\cdot\ln(Re)+2-\left(\frac{2+\ln(Re)}{2}\right)\cdot\cos(2\cdot\alpha)\right] & \frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2} & \frac{1}{Re} & \frac{(1+\cos(2\cdot\alpha))}{(-2\cdot Re^2)} & \frac{3-\cos(2\cdot\alpha)}{2} \\ \frac{(-1+\ln(Re))}{Re^2} & -(\ln(Re)+1) & -1 & \frac{-1}{Re} & \frac{1}{Re^2} & -1 \\ \frac{-\cos(2\cdot\alpha)}{Re^2} & -2\cdot\ln(Re)-2+\cos(2\cdot\alpha) & -2 & \frac{2+(1+\cos(2\cdot\alpha))\cdot\ln(Re)}{-2\cdot Re} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot(Rc-a) \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A1 \\ B1 \\ C1 \\ D1 \\ E1 \\ g1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F}{t} \end{pmatrix}$$

(۲۱)

۲- استخراج روابط جابجايي

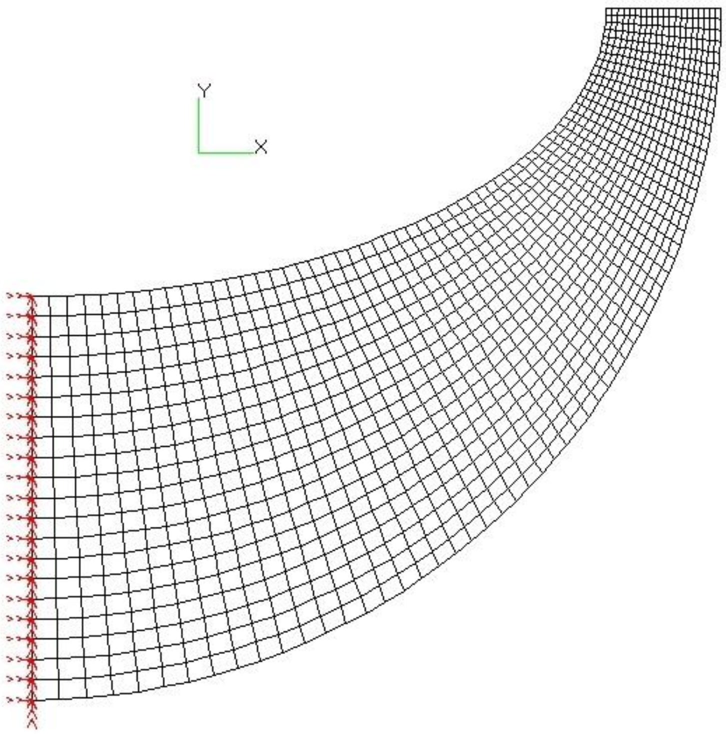
استخراج روابط جابجايي مشابه موارد ذكر شده براي تير خميده با هندسه ثابت ميباشد. بنابراين در اينجا از ذكر تحليلهـا و روابط خودداري ميشود. تنها فرق همانند قسمت قبلي در زمان اعمال شرايط مرزي وجود خواهد داشـت. در ادامـه بـه ذكـر مثـال پرداخته ميشود.

۳- ارائه مثال با روش المان محدود

يك مثال براي بارگذاري فوق با روش .F.E در نرم افزار Msc.Nastran حل شده و نتايج بدست آمده بصورت جدولي در انتها ارائه شده است. بمنظور ارائه نتايج مناسب و مقايسه اي خوب، از ارائه نتايج نزديك به دو انتهاي تير صرف نظر شده است. بنابراين براي دوري از نواحي تمركز تنش، شعاع و زواياي انتخاب شده در وسط تير قرار دارند. با توجه به شبكه بندي تير خميده و شكل نا منظم در دسترسي به شعاعهاي مشخص نقاطي در شعاعهاي مختلف ولي در زواياي ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۷۵ درجه انتخاب شده بشرح ذيل ميباشند. البته در نرم افزار فوق كليه نقاط قابل دسترسي و محاسبه است.

شكل-۳، شبكه بندي شده تير خميده و شكل كلي آنرا نشان ميدهد. تير خميده مورد تحليل در نرم افزار داراي شعاع دايره برابر ۱۲۰۰ و شعاع كوچك بيضي برابر ۵۰۰ و شعاع بزرگ ۱۰۰۰ بوده كه از گستره زاويه صفر تا ۹۰- بصورت ذيل ميباشد:

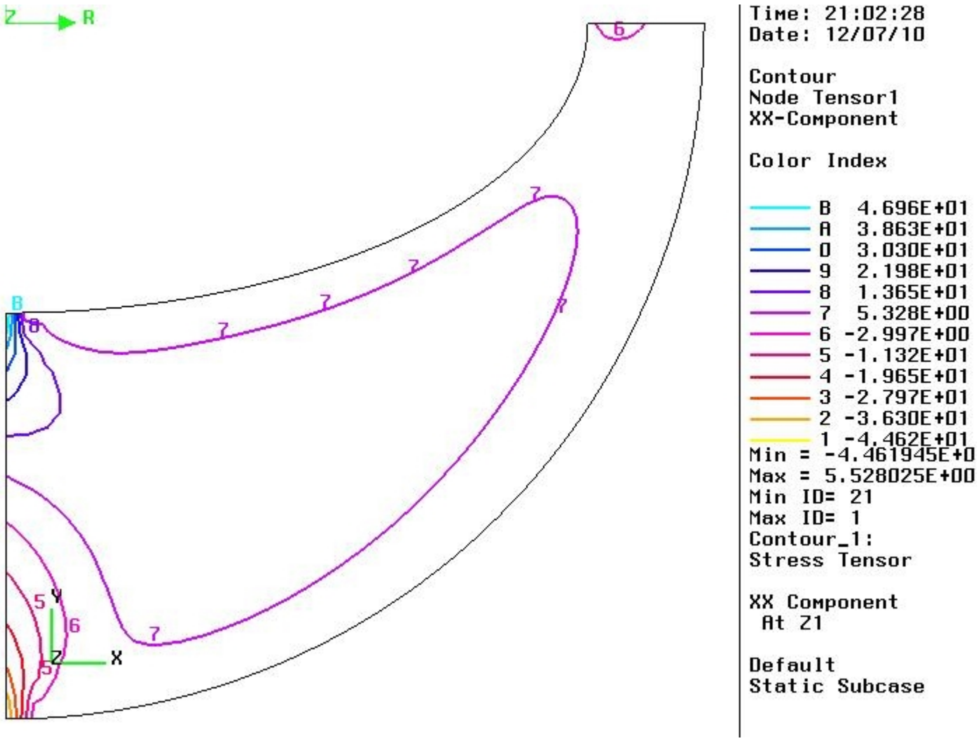
$a := 1000 \quad b := 500 \quad Rc := 1200 \quad F := 50000 \quad t := 5 \quad E := 72000 \quad \nu := 0.33$.



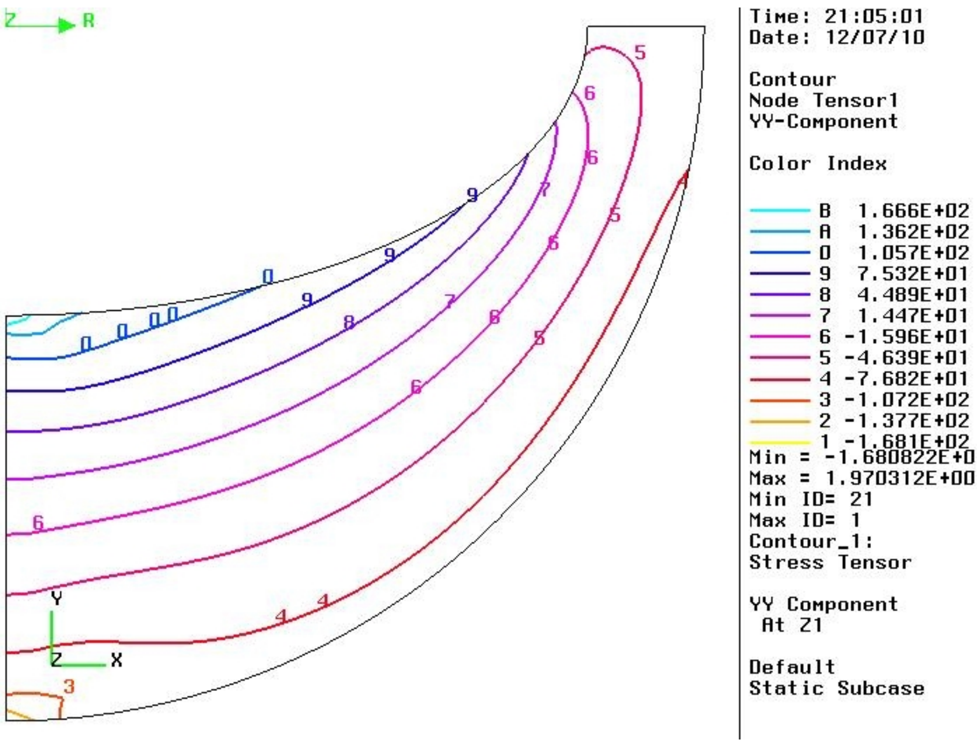
شكل -۳ : شبكه بندي تير خميده با هندسه متغير و شكل كلي آن براي تحليل

۳-۱ بارگذاري نيروي محوري $F = 50000(N)$

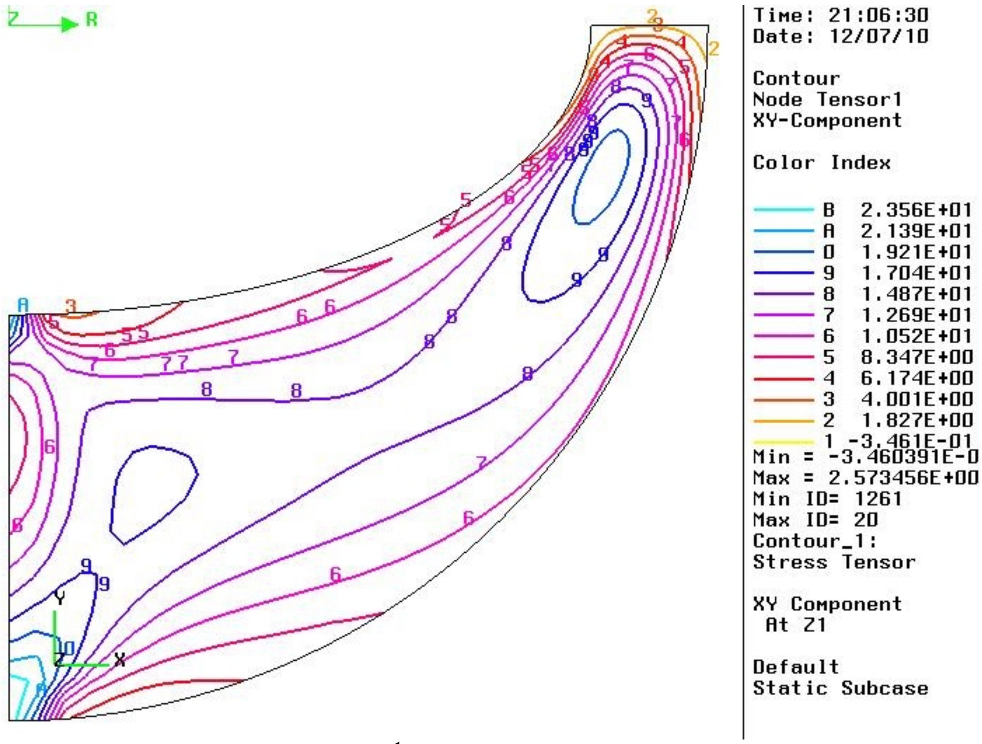
يك نيروي گسترده عمودي روي سطح آزاد تير خميده به مقدار كل ۵۰۰۰۰- نيوتن، كه در دو گوشة سطح آزاد به منظور توزيع يكنواخت تنش نيروي روي گره ها نصف ديگر گره ها قرار داده شده است. به منظور استخراج نتايج در مختصات قطبي، يك دستگاه مجازي در نرم افزار ايجاد گرديده و شكلهاي و نتايج نسبت به آن دستگاه بدست آمده است. اين دستگاه ،يك مختصات قطبي راستگرد است.



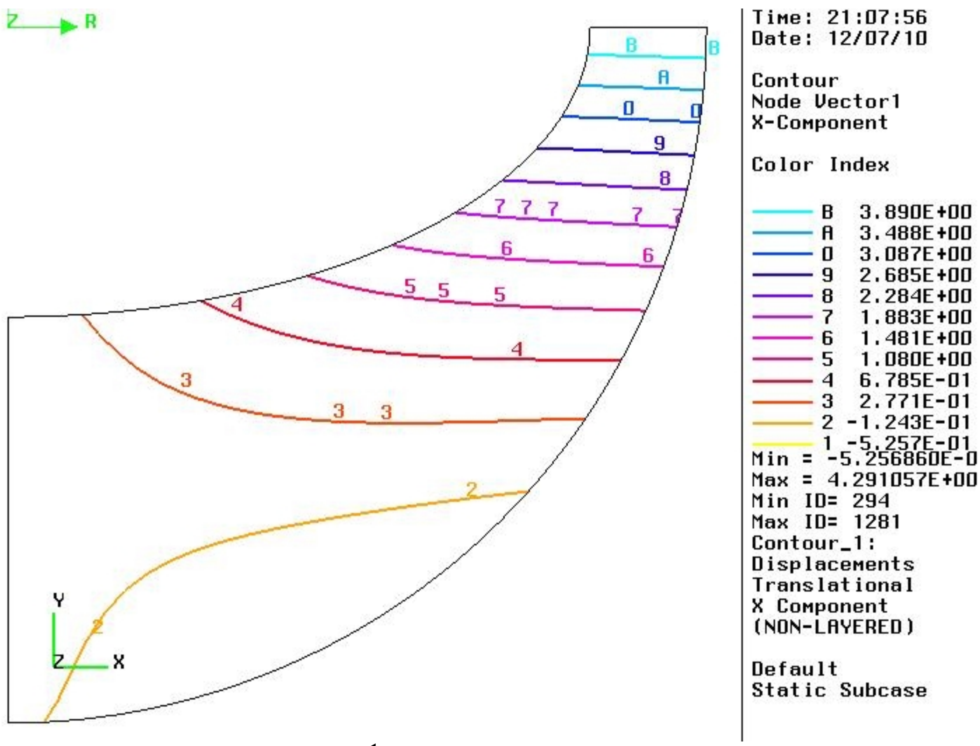
شكل -۲ : تنشهاي شعاعي در بارگذاري محوري



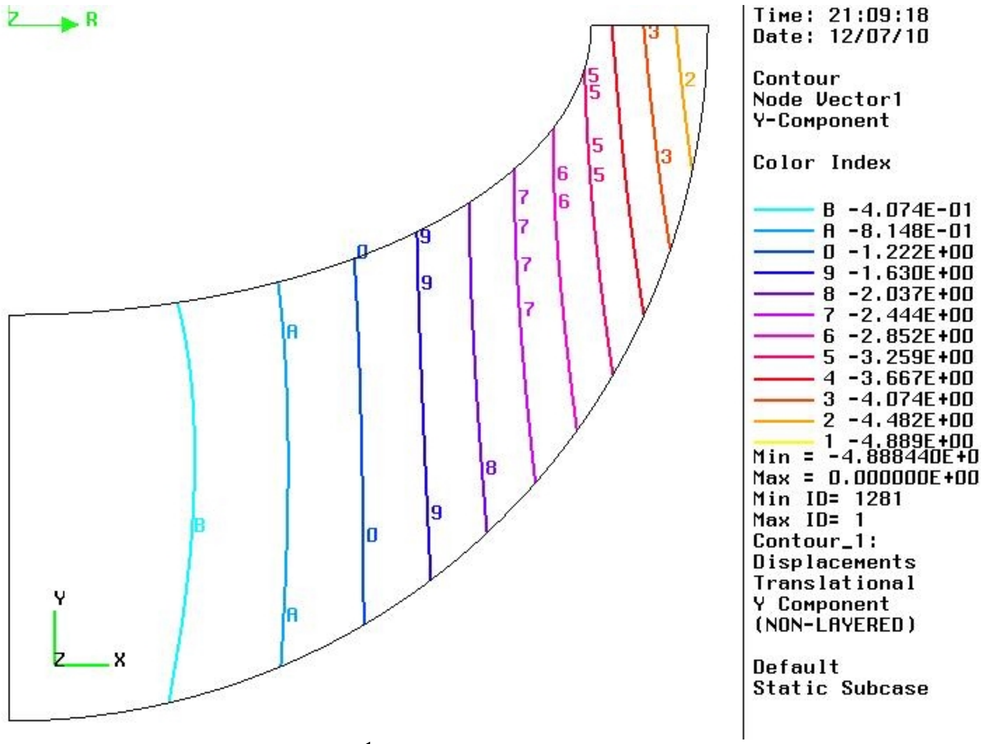
شكل -۳ : تنشهاي زوايه اي در بارگذاري محوري



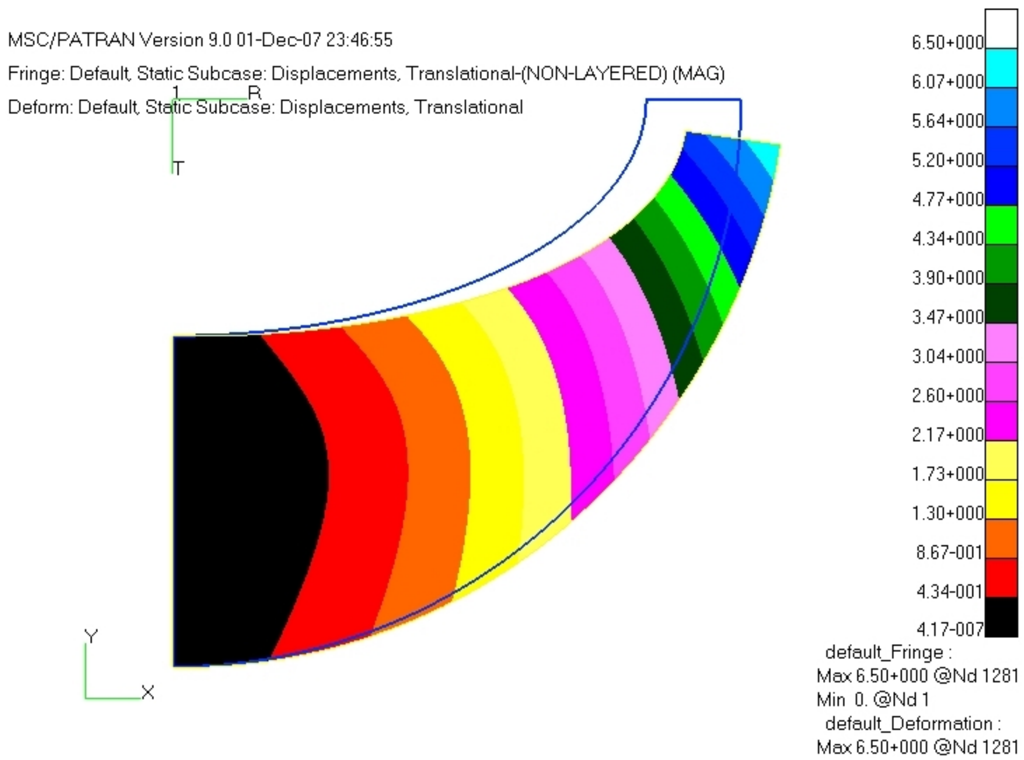
شکل -۴ : تنشهاي برشي در بارگذاري محوري



شکل -۵ : جابجائيهاي شعاعي در بارگذاري محوري



شكل -۶ : جابجائيهاي زاويه اي در بارگذاري محوري



شكل -۷ : كانتوري از جابجايي كلي در بارگذاري محوري

R		1023.7	1094.3	889.1	1085.4	794.8	1048.3	793.8	1109.3	618.4	894.5
θ°		15	15	30	30	45	45	60	60	75	75
σ_r	F.E.	13.9	8.7	20.8	8.5	21.4	10.0	19.5	6.3	13.6	13.9
	Analysis										
σ_{θ}	F.E.	-26.1	-51.8	11.1	-57.8	22.5	-53.5	10.2	-71.6	79.1	-27.4
	Analysis										
$\tau_{r\theta}$	F.E.	-9.6	-6.9	-15.5	-0.9	-18.8	-0.8	-15.5	-0.9	-24.3	-12.9
	Analysis										
U_r	F.E.	3.07	3.09	2.02	2.08	1.22	1.30	0.62	0.73	0.19	0.22
	Analysis										
U_{θ}	F.E.(*)	2.48	2.93	1.06	1.98	0.32	1.17	0.11	0.82	-0.15	0.11
	Analysis										

جدول – ۱ : نتايج روش المان محدود براي تنشها و جابجائيها در نقاط مشخص در بارگذاري محوري

۴- مراجع

۱- "جزوه درسي الاستيسيته " ، دكتر غلامحسين رحيمي .

۲- "تيـر خميده يك سـرگيردار تحت بـار انتهـايي محوري، برشي و ممـــان خمشي بـا هندســه ثابـت و مــواد همگـن" ، بهروز حسين پور بناب.

3- "Theory of Elasticity", By: S. Timoshenko and J.N. Goodier.

۴- " مقاومت پيشرفته و الاستيسيته كاربردي " ، دكتر محمود شاكري .